谷 口 説 男 編

プロシーディング
「損保数理に現れる確率モデル」

—日新火災・九州大学共同研究
2008年11月研究会—

谷 口 説 男 編

2009年2月

前書き

日新火災海上保険株式会社と九州大学大学院数理学研究院は，平成20年4月より，共同研究「日新火災プログラム」を開始いたしました．これは，保険実務に対する新しい要求に応えうる数理モデルの研究を目的とする共同研究です．共同研究は，平成20年度より始まりましたグローバルCOEプログラム「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」に代表される，数理学研究院の推進する産業技術数理共同教育研究プロジェクトの一環であります．

数理学研究院は，統計学，計算機数学，最適化理論などに携わる研究者を多く擁し，多年にわたり応用数学を視野に入れた数学の教育研究を推し進めてまいりました．とくに，平成18年に大学院博士後期課程に機能数理学コースを設置し，産業技術数理を志向する数理科学研究者の養成に，わが国で初めてとなる組織的な取り組みを始めています．機能数理学コース修了要件の重要課題として企業への3ヶ月以上の長期インターンシップがあります．平成19年7月に，日新火災海上保険株式会社は，金融機関としてはじめて，長期インターンシップ学生を受け入れました．これを契機に，保険業務における数学の有用性が再確認され，保険会社と数学研究機関のわが国初の直接的な共同研究へとつながりました．また，本年が日新火災海上保険株式会社創立100周年となることも本共同研究の契機となっています．

保険業界には，平成23年を目処に国際化(国際会計基準)や新しい経営健全さを示す指標(ソルベンシーマージン)が導入されようとしています．これらの動きに対応しうる新しい保険実務に対応できる高度な数理技術の素養を持つ人材を育成し，数理モデルを開発することがこの共同研究の目的です．共同研究では，学術研究員2名に加え，大学院博士課程学生2名をリサーチアシスタントに雇用し，共同研究にあたっています．保険会社の扱う保険金，支払い件数に関する数理モデルを開発，それらの新たな推計方法の導入，保険会社のキャッシュフローのモデル化，さらに保険会社の抱えるリスク度合いの計測法の開発などについての共同研究を予定しています．

数学が様々な場面で直接的な形で役立っていることは既によく知られています．指紋データ処理に利用されているウエーブレット解析，インターネットでは欠かせない暗号理論を支える整数論，CTスキャンに利用されるラドン変換，DNA解析と結びついた位相幾何学，色々な所で利用されている統計学や流体力学，など多くの事例を挙げることができます．これらは全て製造業と関ることですが，非製造業に目を向れば，数理ファイナンスに利用される確率解析もそのひとつです．損保数理にも，数理ファイナンスと同様に，統計学・確率論が重要な役割りを果します．ここでも数学が直接的な形で使われています．

共同研究開始以来，保険数理に関る準備的研究を進めてまいりましたが，今後の応用が見込める幾つかの数理モデルについて，平成20年11月28日に，日新火災海上保険株式会社本社において，中間発表会をとり行いました．まだ入門的ではありますが，ロスディベラップメントに関る，チェインラダー法，マックモデル，ランダムウォークモデル，マークドポアソン過程などについての紹介・報告がなされました．本レクチャーノートは，その折りの配布資料に加筆修正を加えた報告書からなっております．

日本語で書かれた保険数理モデルに関する文献の一つとして利用していただけることを，そして様々なご教示をいただけれることを，強く願っております．

平成 21 年 1 月

編者 谷 口 説 男

はじめに　– 日新火災 –

弊社は，2008 年度が創立 100 周年にあたることから，その記念事業の一環として，かねてより準備を進めてきた九州大学大学院数理学研究院との共同研究をこの 5 月からスタートさせています．この共同研究は，現在保険業界において 2011 年を目途に準備作業が進められている国際会計基準や新ソルベンシー・マージンの導入に対応していくために，資産・負債データの整備と合わせて数理技術の向上と数理モデルの開発・構築等の実現を目的としています．共同研究は，当面 2 年間を予定していますが，去る 11 月 28 日に弊社東京本社において共同研究スタートから半年間の成果について「中間発表会」を開催いたしました．この「中間発表会」はこれまでの研究成果を東京海上グループ内の数理担当者に公表して，意見や助言をいただき今後の研究に生かしていくことを主眼に実施したものです．おかげさまで，大所高所からのご意見や貴重なご助言をいただくなど，初めての試みとしては成功裡に終了することができました．

ご既承のように，平成 20 年度に九州大学大学院数理学研究院が文部科学省のグローバル COE プログラム「マス・フォア・インダストリー教育研究拠点」に採択されました．今般，同研究院の若山研究院長，谷口副研究院長のご厚意により，「マス・フォア・インダストリー」の小冊子に今般の「中間発表会」の研究成果を掲載・刊行いただくこととなりました．この場を借りて，厚くお礼を申し上げます．また，これらの研究成果は，まさに数学と保険業界との協働事業の好事例ではないかと自負しているところでもあります．

今後とも，本共同研究を更に進めて，リスク管理の一層の高度化，財務状況の透明化・明確化の向上をはかり，保険業界の発展に貢献していく所存です．

本誌掲載の研究成果につきましては，内容に目を通していただき，各方面からのご指摘ご鞭撻をいただきますよう，よろしくお願い申し上げます．

日新火災海上保険株式会社
リスク管理部長

杉山　元泰

目 次

IBNR 見積法のサーベイ
– ランオフ三角形とチェインラダー法 –

田 中 立 志
九州大学大学院数理学研究院

1　序

支払備金（Incurred But Not Reported, IBNR）とは, 既発生の保険事故に対する保険金債務のことである. IBNR は, 発生主義での期間損益の計算のため, 会社財政状況の正確な評価のため, あるいは収支状況を正しく把握し料率改定を行うためにも大変重要な概念である. 以下では, 文献 [2] に従い, IBNR の統計的見積法について, その基本的な概念であるチェインラダー法を中心に紹介する.

2　ロスディベロップメントデータ

2.1　当該年度保険金

あるポートフォリオを当該年度保険金によってデータ化しよう. $Z_{i,k}$ を, 事故年度 i の事故で経過年度 k において支払った保険金とする. ただし, i, k は 0 以上の整数値をとるものとする. この $Z_{i,k}$ を, 事故年度 i, 経過年度 k の当該年度保険金 (incremental loss) という.

以下の表は, n 年度までの当該年度保険金のデータである. 一般的に事故年度と経過年度の 2 つの変数によりこのような三角形のデータができることがわかる. この三角形は, 保険業界ではランオフ三角形あるいはロスディベロップメントと呼ばれる. $i+k \leq n$ のとき観測可能, $i+k > n$ のとき観測不能という. 観測可能な部分のデータを用いて観測不能な部分を推定することが目的となる.

	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	$n-i$	$\cdots$	$n-1$	n
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$	$\cdots$	$Z_{0,k}$	$\cdots$	$Z_{0,n-i}$	$\cdots$	$Z_{0,n-1}$	$Z_{0,n}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	$\cdots$	$Z_{1,k}$	$\cdots$	$Z_{1,n-i}$	$\cdots$	$Z_{1,n-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
i	$Z_{i,0}$	$Z_{i,1}$	$\cdots$	$Z_{i,k}$	$\cdots$	$Z_{i,n-i}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
$n-k$	$Z_{n-k,0}$	$Z_{n-k,1}$	$\cdots$	$Z_{n-k,k}$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
$n-1$	$Z_{n-1,0}$	$Z_{n-1,1}$							
n	$Z_{n,0}$								

縦軸：事故年度, 横軸：経過年度

2.2 累計保険金

あるポートフォリオを累計保険金によってデータ化しよう．$S_{i,k}$ を, 事故年度 i の事故で経過年度 k までに支払った保険金の総額とする．ただし, i, k は 0 以上の整数値をとるものとする．この $S_{i,k}$ を, 事故年度 i, 経過年度 k の累計保険金 (cumulative loss) という．また, $k \to \infty$ のとき, $\lim_{k\to\infty} S_{i,k}$ を事故年度 i の最終累計保険金 (ultimate cumulative loss) という．

以下の表は, n 年度までの当該年度保険金のランオフ三角形である．$i+k \leq n$ のとき観測可能, $i+k > n$ のとき観測不能という．

	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	$n-i$	$\cdots$	$n-1$	n
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	$\cdots$	$S_{0,k}$	$\cdots$	$S_{0,n-i}$	$\cdots$	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	$\cdots$	$S_{1,k}$	$\cdots$	$S_{1,n-i}$	$\cdots$	$S_{1,n-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$	$\cdots$	$S_{i,k}$	$\cdots$	$S_{i,n-i}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
$n-k$	$S_{n-k,0}$	$S_{n-k,1}$	$\cdots$	$S_{n-k,k}$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
$n-1$	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$							
n	$S_{n,0}$								

縦軸：事故年度, 横軸：経過年度

当該年度保険金 $Z_{i,k}$ との間には関係式

$$S_{i,k} = \sum_{l=0}^{k} Z_{i,l}$$

が成り立つため, 未来の当該年度保険金を見積もることと未来の累計保険金を見積もることとは同じことである. が, どこにどのような仮定を設けて推定するかで様々な推定方法が考えられ, それらは実際に異なる推定値を与え得る．保険実務における IBNR の見積もりに関してどの推定方法に則って求めた推定値が最良であるかは, 数学以外の要素も孕んだ難しい問題であり多方面からの見解を要するであろう．本稿では, あくまで保険実務への数学的見地からの応用として, 過去の保険金データに基づく統計的見積法についていくつか知られているものを紹介する.

3 ディベロップメントパターン

われわれの課題は, ランオフ三角形の右下の部分を推定することである．その統計的推定の際には以下の仮定を設ける.

「データは, すべての事故年度で共通の 1 つのパターン（確率過程）に従う」

以下に, 3 つの基本的なディベロップメントパターンを記す.

当該年度保険金割合に関するディベロップメントパターン
$\sum_{l=0}^{n}\theta_l=1$ を満たすような数 $\theta_0,\dots,\theta_n$ が存在して, 任意の $i,k\in\{0,\dots,n\}$ に対して

$$\theta_k=\frac{E[Z_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$$

が成立する. すなわち, 当該年度保険金 $Z_{i,k}$ の平均の, i 事故年度の最終累計保険金の平均に対する割合が事故年度によらずに一定であるという仮定である. このディベロップメントパターンを, パターン I と略す.

累計保険金割合に関するディベロップメントパターン
$\gamma_n=1$ を満たすような数 $\gamma_0,\dots,\gamma_n$ が存在して, 任意の $i,k\in\{0,\dots,n\}$ に対して

$$\gamma_k=\frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}$$

が成立する. すなわち, 累計保険金 $S_{i,k}$ の平均の, i 事故年度の最終累計保険金の平均に対する割合が事故年度によらずに一定であるという仮定である. このディベロップメントパターンを, パターン C と略す.

因子に関するディベロップメントパターン
数 $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ が存在して, 任意の $i\in\{0,\dots,n\},k\in\{1,\dots,n\}$ に対して

$$\varphi_k=\frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,k-1}]}$$

が成立する. すなわち, 累計保険金 $S_{i,k}$ の平均の, 累計保険金 $S_{i,k-1}$ の平均に対する割合が事故年度によらずに一定であるという仮定である. このディベロップメントパターンを, パターン F と略す.

上記の 3 つはすべて, 事故年度 i にはよらないパラメータの存在を仮定する. また,

$$\gamma_k=\sum_{l=0}^{k}\theta_l,\varphi_k=\frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}$$

が成立することにより, 上記の 3 つは本質的にはどれも同じものであることに注意する.

4　さまざまな統計的見積法

当該年度保険金あるいは累計保険金のどちらかの推定値を与えればもう一方の推定値も与えられるので, どちらか一方を推定すればよい. ここでは将来の累計保険金を見積もるいくつかの方法について概説する.

4.1　ボーンヒュッター・ファガソン法

以下, BF 法と略す. BF 法では以下の仮定とエスティメーターを設けて累計保険金を推定する. (エスティメーターとは, 保険金見積の際に必要な値のことである. これはどこかで別に見積もっておく必要がある.)

仮定
数 $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ と, $\gamma_n = 1$ を満たす数 $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ が存在して, 任意の $i, k \in \{0, \dots, n\}$ に対して

$$E[S_{i,k}] = \gamma_k \alpha_i$$

が成立する.

エスティメーター
$j \in \{0, \dots, n\}$ に対し, j 年度の最終累計保険金 $\hat{\alpha}_j$ と, j 年度の累計保険金割合 $\hat{\gamma}_j$ はどこからか勝手に与えられているものとする. ただし, $\hat{\gamma}_n = 1$ とする.

推定値
このとき, $i + k \geq n$ に対する累計保険金は以下の値として推定される.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{BF}} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{\alpha}_i.$$

注意
仮定のディベロップメントパターンは, パターン C だと思える. 実際, $E[S_{i,n}] = \alpha_i$ であるから $E[S_{i,k}] = \gamma_k E[S_{i,n}]$ である.
BF 法は, 以下で述べる手法すべての基礎となっている.

4.2 ベンクタンダー・ホビネン法

以下, BH 法と略す. BH 法では上記の BF 法と同じ仮定と同じエスティメーターを設けて累計保険金を推定する.

推定値
$i + k \geq n$ に対する累計保険金は以下の値として推定される.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{BH}} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{S}_{i,n}^{\mathrm{BF}}.$$

また, より一般に, $m \geq 0$ に対して

$$\hat{S}_{i,k}^{(m)} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{S}_{i,n}^{(m-1)}$$

として推定される. ただし, $\hat{S}_{i,n}^{(-1)} = \hat{\alpha}_i$ である.

注意
累計保険金に重点を置き, 最終累計保険金のエスティメーターの寄与を減らしたいときに, BF 法を改良した BH 法が用いられる.

4.3 ロスディベロップメント法

以下, LD 法と略す. LD 法では以下の仮定とエスティメーターを設けて累計保険金を推定する.

仮定
$\gamma_n = 1$ を満たす数 $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$ が存在して, 任意の $i, k \in \{0, \ldots, n\}$ に対して

$$E[S_{i,k}] = \gamma_k E[S_{i,n}]$$

が成立する.

エスティメーター
$j \in \{0, \ldots, n\}$ に対し, j 年度の累計保険金割合 $\hat{\gamma}_j$ はどこからか勝手に与えられているものとする. ただし, $\hat{\gamma}_n = 1$ とする.

推定値
このとき, $i + k \geq n$ に対する累計保険金は以下の値として推定される.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{LD}} = \hat{\gamma}_k \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}}.$$

注意
仮定のディベロップメントパターンは, パターン C そのものである. 推定値 $\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{LD}}$ は以下のようにも書ける.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{LD}} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i}) \hat{S}_{i,n}^{\mathrm{LD}}.$$

すなわち, LD 法は BF 法の特別な場合である.

4.4 チェインラダー法

以下, CL 法と略す. CL 法では以下の仮定を設けて累計保険金を推定する. エスティメーターは要らないことに注意する.

仮定
数 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ が存在して, 任意の $i \in \{0, \ldots, n\}, k \in \{1, \ldots, n\}$ に対して

$$E[S_{i,k}] = \varphi_k E[S_{i,k-1}]$$

が成立する.

推定値
このとき, $i + k \geq n$ に対する累計保険金は以下の値として推定される.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{CL}} = S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^{k} \hat{\varphi}_l^{\mathrm{CL}},$$

ただし,

$$\hat{\varphi}_l^{\mathrm{CL}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}.$$

$\boxed{\text{注意}}$
仮定のディベロップメントパターンは, パターン F そのものである. $\hat{\gamma}_k^{\mathrm{CL}} = \prod_{l=k+1}^{n} \frac{1}{\hat{\varphi}_l^{\mathrm{CL}}}$ とせよ. 推定値 $\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{CL}}$ は以下のようにも書ける.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{CL}} = \hat{\gamma}_k^{\mathrm{CL}} \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}^{\mathrm{CL}}}.$$

すなわち, CL 法は LD 法（したがって BF 法）の特別な場合である.

4.5 グロッシングアップ法

以下, GU 法と略す. GU 法では CL 法と同じ仮定を設けて累計保険金を推定する. エスティメーターは要らないことに注意する.

$\boxed{\text{推定値}}$
$i+k \geq n$ に対する累計保険金は以下の値として推定される.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{GU}} = \hat{\gamma}_k^{\mathrm{GU}} \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}^{\mathrm{GU}}},$$

ただし, $\hat{\gamma}_n^{\mathrm{GU}} = 1$ で, $k < n$ のとき

$$\hat{\gamma}_k^{\mathrm{GU}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k-1} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k-1} \hat{S}_{j,k-1}^{\mathrm{GU}}}.$$

$\boxed{\text{注意}}$
推定値 $\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{GU}}$ は,

$$\hat{\gamma}_n^{\mathrm{GU}}(=1) \to \hat{S}_{0,n}^{\mathrm{GU}} \to \hat{\gamma}_{n-1}^{\mathrm{GU}} \to \hat{S}_{1,n}^{\mathrm{GU}} \to \hat{\gamma}_{n-2}^{\mathrm{GU}} \to \hat{S}_{2,n}^{\mathrm{GU}} \to \cdots$$

と, 帰納的に計算していくことになる. また, 推定値 $\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{GU}}$ は以下のようにも書ける.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{GU}} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k^{\mathrm{GU}} - \hat{\gamma}_{n-i}^{\mathrm{GU}}) \hat{S}_{i,n}^{\mathrm{GU}}.$$

すなわち, GU 法は BF 法の特別な場合である. 実は, GU 法と CL 法は同値であることが文献 [1](1999) によって知られている.

4.6 マージナルサム法

以下, MS 法と略す. MS 法では以下の仮定とエスティメーターを設けて累計保険金を推定する.（MS 法では, エスティメーターの与え方も指定する.）

$\boxed{\text{仮定}}$
数 $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ と, $\sum_{l=0}^{n} \theta_l = 1$ を満たす数 $\theta_0, \ldots, \theta_n$ が存在して, 任意の $i, k \in \{0, \ldots, n\}$ に対して

$$E[Z_{i,k}] = \theta_k \alpha_i$$

が成立する.

エスティメーター

以下の (i), (ii), (iii) からなる連立方程式の解として, $\hat{\alpha}_0^{\mathrm{MS}}, \ldots, \hat{\alpha}_n^{\mathrm{MS}}$ および $\hat{\theta}_0^{\mathrm{MS}}, \ldots, \hat{\theta}_n^{\mathrm{MS}}$ が与えられているものとする.

(i) 任意の $i \in \{0, \ldots, n\}$ に対し, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-i} \hat{\alpha}_i \hat{\theta}_j = \sum_{j=0}^{n-i} Z_{i,j}$,

(ii) 任意の $k \in \{0, \ldots, n\}$ に対し, $\displaystyle\sum_{l=0}^{n-k} \hat{\alpha}_l \hat{\theta}_k = \sum_{l=0}^{n-k} Z_{l,k}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{l=0}^{n} \hat{\theta}_l = 1$.

推定値

このとき, $i + k \geq n$ に対する累計保険金は以下の値として推定される.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{MS}} = \hat{\gamma}_k^{\mathrm{MS}} \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}^{\mathrm{MS}}},$$

ただし,

$$\hat{\gamma}_k^{\mathrm{MS}} = \sum_{l=0}^{k} \hat{\theta}_l^{\mathrm{MS}}.$$

注意

仮定のディベロップメントパターンは, パターン I だと思える. 実際, $E[S_{i,n}] = E[\sum_{l=0}^n Z_{i,l}] = \sum_{l=0}^n \theta_l \alpha_i = \alpha_i$ であるから, $E[Z_{i,k}] = \theta_k E[S_{i,n}]$ である. また, エスティメーターの満たす連立方程式の解は一意的に定まり, $\hat{\alpha}_i^{\mathrm{MS}} = \hat{S}_{i,n}^{\mathrm{GU}}, \hat{\theta}_0^{\mathrm{MS}} = \hat{\gamma}_0^{\mathrm{GU}}, \hat{\theta}_k^{\mathrm{MS}} = \hat{\gamma}_k^{\mathrm{GU}} - \hat{\gamma}_{k-1}^{\mathrm{GU}} (k \geq 1)$ となる. これはすなわち, MS 法は GU 法（したがって CL 法）と同値であることを意味している.

4.7 ケープコッド法

以下, CC 法と略す. CC 法では LD 法と同じ仮定と同じエスティメーターを設けて累計保険金を推定する. また, この手法では, 事故年度 i ごとの保険料 $\pi_i \in (0, \infty)$ のデータも要する.

推定値

$i + k \geq n$ に対する累計保険金は以下の値として推定される.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{CC}} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k^{\mathrm{CC}} - \hat{\gamma}_{n-i}^{\mathrm{CC}}) \pi_i \hat{\kappa}^{\mathrm{CC}},$$

ただし,

$$\hat{\kappa}^{\mathrm{CC}} = \frac{\sum_{j=0}^n S_{j,n-j}}{\sum_{j=0}^n \hat{\gamma}_{n-j} \pi_j}.$$

この $\hat{\kappa}^{\mathrm{CC}}$ のことをケープコッド損害率という.

注意

CC 法は BF 法の特別な場合である. 実際, $\hat{\alpha}_i = \pi_i \hat{\kappa}^{\mathrm{CC}}$ とおけばよい. CC 法のほうが LD 法よりも計算結果のばらつきが小さい.

4.8 アディティブ法

以下, AD 法と略す. AD 法では以下の仮定を設けて累計保険金を推定する. エスティメーターは要らないことに注意する. また, この手法では, CC 法同様, 事故年度 i ごとの保険料 $\pi_i \in (0, \infty)$ のデータも要する.

仮定

数 $\zeta_0, \dots, \zeta_n$ が存在して, 任意の $i, k \in \{0, \dots, n\}$ に対して

$$E[Z_{i,k}] = \zeta_k \pi_i$$

が成立する.

推定値

このとき, $i + k \geq n$ に対する累計保険金は以下の値として推定される.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{AD}} = S_{i,n-i} + \sum_{l=n-i+1}^{k} \hat{Z}_{i,l}^{\mathrm{AD}},$$

ただし,

$$\hat{Z}_{i,l}^{\mathrm{AD}} = \hat{\zeta}_l^{\mathrm{AD}} \pi_i, \hat{\zeta}_l^{\mathrm{AD}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} \pi_j}.$$

注意

仮定のディベロップメントパターンは, パターン C だと思える. 実際, $\alpha_i = \pi_i \sum_{l=0}^{n} \zeta_l, \gamma_k = \frac{\sum_{l=0}^{k} \zeta_l}{\sum_{l=0}^{n} \zeta_l}$ とおくと, $E[S_{i,k}] = E[\sum_{l=0}^{k} Z_{i,l}] = \sum_{l=0}^{n} \zeta_l \pi_i = \gamma_k \alpha_i$ であり, $\gamma_n = 1$ より $\alpha_i = E[S_{i,n}]$ であるから, $E[S_{i,k}] = \gamma_k E[S_{i,n}]$ である.

$\hat{\gamma}_k^{\mathrm{AD}} = \dfrac{\sum_{l=0}^{k} \hat{\zeta}_l^{\mathrm{AD}}}{\sum_{l=0}^{n} \hat{\zeta}_l^{\mathrm{AD}}}, \hat{\alpha}_i^{\mathrm{AD}} = \pi_i \displaystyle\sum_{l=0}^{n} \hat{\zeta}_l^{\mathrm{AD}}$ とせよ. このとき, 推定値 $\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{AD}}$ は以下のようにも書ける.

$$\hat{S}_{i,k}^{\mathrm{AD}} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k^{\mathrm{AD}} - \hat{\gamma}_{n-i}^{\mathrm{AD}}) \hat{\alpha}_i^{\mathrm{AD}}.$$

したがって, AD 法は BF 法の特別な場合である.

さらに, $\hat{\kappa}^{\mathrm{AD}} = \displaystyle\sum_{l=0}^{n} \hat{\zeta}_l^{\mathrm{AD}}$ とせよ. このとき,

$$\hat{\kappa}^{\mathrm{AD}} = \frac{\sum_{j=0}^{n} S_{j,n-j}}{\sum_{j=0}^{n} \hat{\gamma}_{n-j}^{\mathrm{AD}} \pi_j}$$

と書ける. したがって, AD 法は CC 法の特別な場合である.

5 跋：考察

少なくとも現在の保険業務における手法の中ではチェインラダー法が最良とされており, 実務でも活躍している. その理由は, ある程度理に適っているという理論的な利点と, 計算が容易とい

う時間的・実務的な利点があるからであろう. しかし, 現行のチェインラダー法はあくまで点推定であり, 区間推定を与えない. (チェインラダー法においてある種の区間推定を与える方法については本レクチャーノートの斎藤氏の稿「Mack の公式：支払備金の区間推定」を参照.) また, 過去のデータが 0 であれば以後 0 しか現れないという実務的な弱点もある. (これを克服するひとつの方法が, 本レクチャーノートの筆者の稿「保険金見積もりの細分化」で与えられる.) これらにどう対処するかは, 保険業界の今後の課題である.

参考文献

[1] Klaus D. Schmidt and Holger Lorenz, *Grossing-Up, Chain-Ladder and Marginal-Sum Estimation*, Blätter DGVM 24, 1999, 195-200.

[2] Klaus D. Schmidt, *Methods and Models of Loss Reserving Based on Run-Off Triangles: A Unifying Survey*, Casual Actuarial Society Forum Fall 2006, 269-317.

Mack の公式：支払備金の区間推定

斎藤新悟
九州大学大学院数理学研究院

1　はじめに

この文書の目的は，Mack [1] の内容を概説し，そこで与えられている Mack の公式の一般化について紹介することである．執筆の際は Wüthrich and Merz [2] を適宜参照した．

チェインラダー法 (chain-ladder method) は支払備金の統計的見積法のうち最も有名なものであり，実務でも広く利用されている．チェインラダー法は従来は単なる計算方法に過ぎないと考えられていたが，実際には多くの確率モデルによって導出されることが分かってきた．Mack はチェインラダー法を導く新たな確率モデルを与えたが，これは**分布によらない** (distribution-free) という点で画期的であった．

さらに，Mack はこの確率モデルに基づいて支払備金を区間推定する公式を提示した．これはシミュレーションや乱数を必要とせず，計算が簡単にできる有用な公式である．

この文書では，第 2 節で Mack モデルとそれによる支払備金の点推定について述べ，第 3 節で支払備金を区間推定する Mack の公式とその一般化を扱う．

2　Mack モデルによる点推定

2.1　設定

事故年度 i の経過年数 j までの累計保険金を $S_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ とする．$S_{i,j}$ は正の実数値をとる確率変数である．$i + j \leqq n + 1$ なる i, j に対しては $S_{i,j}$ が既知であるとして，$i + j \geqq n + 2$ に対する $S_{i,j}$ を推定する．

Mack モデルでは次の仮定をおく：

- $\mathbb{R}^n$ 値確率変数 $(S_{i,1}, \ldots, S_{i,n})$ $(i = 1, \ldots, n)$ は独立である（事故年度に関する独立性）．
- 各 $j = 1, \ldots, n-1$ に対してある定数 f_j が存在し，

$$E[S_{i,j+1}|S_{i,1}, \ldots, S_{i,j}] = S_{i,j} f_j$$

  がすべての $i = 1, \ldots, n$ に対して成立する．
- 各 $j = 1, \ldots, n-1$ に対してある定数 σ_j が存在し，

$$V(S_{i,j+1}|S_{i,1}, \ldots, S_{i,j}) = S_{i,j} \sigma_j^2$$

  がすべての $i = 1, \ldots, n$ に対して成立する．

これらの仮定において $S_{i,j}$ の具体的な分布形は定められていないので，「分布によらない」と表現される．

各 $i,j=1,\dots,n$ に対して $\mathcal{F}_{i,j}=\{S_{i,1},\dots,S_{i,j}\}$ とおくと，2 つめ，3 つめの仮定内の式はそれぞれ $E[S_{i,j+1}|\mathcal{F}_{i,j}]=S_{i,j}f_j$, $V(S_{i,j+1}|\mathcal{F}_{i,j})=S_{i,j}\sigma_j^2$ と書ける．既知の $S_{i,j}$ 全体の集合を $\mathcal{F}=\{S_{i,j}\mid i+j\leqq n+1\}$ とおく．

$i+j\geqq n+2$ のときの $S_{i,j}$ を予測するのが目標であるが，$S_{i,j}$ は確率変数なので点推定としては $E[S_{i,j}|\mathcal{F}]$ を推定するのが妥当である．したがって，$S_{i,j}$ と推定量 $\hat{S}_{i,j}$ の差は，$S_{i,j}$ が確率変数であることから生じる $S_{i,j}$ と $E[S_{i,j}|\mathcal{F}]$ の差と，推定の誤差から生じる $E[S_{i,j}|\mathcal{F}]$ と $\hat{S}_{i,j}$ の差の 2 つに分解できる．このことは3.1 節でより詳しく考察する．

また，各 $j=1,\dots,n$ に対して $\mathcal{G}_j=\{S_{i,k}\mid i+k\leqq n+1,\ 1\leqq k\leqq j\}=\mathcal{F}\cap\bigcup_{i=1}^n\mathcal{F}_{i,j}$ とおく．$\mathcal{G}_j$ は後に様々な計算をするときに重要な役割を果たす．

2.2 f_j の推定

推定 2.1 $j=1,\dots,n-1$ に対して，f_j を次で推定する：

$$\hat{f}_j=\frac{S_{1,j+1}+\cdots+S_{n-j,j+1}}{S_{1,j}+\cdots+S_{n-j,j}}.$$

注意 2.2 $\hat{f}_j$ は $\mathcal{G}_{j+1}$ の元の式で書ける．

以下で示すように，$\hat{f}_j$ は f_j の不偏推定量であり，さらにある意味で最良推定量となっている．この小節を通じて $j=1,\dots,n-1$ を 1 つとって固定しておく．

命題 2.3 $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-j}$ を和が 1 であるような非負確率変数で $\mathcal{G}_j$ の元の式で書けるものとし，

$$\hat{f}'_j=\alpha_1\frac{S_{1,j+1}}{S_{1,j}}+\cdots+\alpha_{n-j}\frac{S_{n-j,j+1}}{S_{n-j,j}}$$

とおくと，$E[\hat{f}'_j|\mathcal{G}_j]=f_j$ が成立する．特に $E[\hat{f}'_j]=f_j$，すなわち $\hat{f}'_j$ は f_j の不偏推定量である．

証明 α_i, $S_{i,j}$ はすべて $\mathcal{G}_j$ の元の式で書けることと，事故年度に関する独立性を用いると，

$$E[\hat{f}'_j|\mathcal{G}_j]=E\left[\sum_{i=1}^{n-j}\alpha_i\frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}}\middle|\mathcal{G}_j\right]=\sum_{i=1}^{n-j}\alpha_i\frac{E[S_{i,j+1}|\mathcal{G}_j]}{S_{i,j}}=\sum_{i=1}^{n-j}\alpha_i\frac{E[S_{i,j+1}|\mathcal{F}_{i,j}]}{S_{i,j}}=\sum_{i=1}^{n-j}\alpha_i f_j=f_j$$

を得る． ∎

例 2.4 (1) $\alpha_i=S_{i,j}/(S_{1,j}+\cdots+S_{n-j,j})$ とおくと $\hat{f}'_j=\hat{f}_j$ となる．

(2) $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-j}$ を和が 1 であるような非負定数とした場合，明らかにこれらは $\mathcal{G}_j$ の元の式で書ける．特にこれらがすべて $1/(n-j)$ に等しいとき

$$\hat{f}'_j=\frac{1}{n-j}\left(\frac{S_{1,j+1}}{S_{1,j}}+\cdots+\frac{S_{n-j,j+1}}{S_{n-j,j}}\right)$$

となる．

命題2.3，例2.4 (1) より，特に次が成立する：

系 2.5 $E[\hat{f}_j|\mathcal{G}_j] = f_j$ が成立する．特に $E[\hat{f}_j] = f_j$，すなわち $\hat{f}_j$ は f_j の不偏推定量である．

さらに，次の意味で $\hat{f}_j$ は $\hat{f}'_j$ の中で最良である：

命題 2.6 命題 2.3 の $\hat{f}'_j$ の中で，$\hat{f}'_j = \hat{f}_j$ は $V(\hat{f}'_j|\mathcal{G}_j)$ および $V(\hat{f}'_j)$ を最小とする．

証明 まず $V(\hat{f}'_j|\mathcal{G}_j)$ について考える．事故年度に関する独立性より

$$
\begin{aligned}
V(\hat{f}'_j|\mathcal{G}_j) &= V\left(\sum_{i=1}^{n-j}\alpha_i\frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}}\middle|\mathcal{G}_j\right) = \sum_{i=1}^{n-j}V\left(\alpha_i\frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}}\middle|\mathcal{G}_j\right) = \sum_{i=1}^{n-j}\frac{\alpha_i^2}{S_{i,j}^2}V(S_{i,j+1}|\mathcal{G}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n-j}\frac{\alpha_i^2}{S_{i,j}^2}V(S_{i,j+1}|\mathcal{F}_{i,j}) = \sigma_j^2\sum_{i=1}^{n-j}\frac{\alpha_i^2}{S_{i,j}}
\end{aligned}
$$

なので，Cauchy-Schwarz の不等式より

$$
V(\hat{f}'_j|\mathcal{G}_j)\sum_{i=1}^{n-j}S_{i,j} = \sigma_j^2\left(\sum_{i=1}^{n-j}\frac{\alpha_i^2}{S_{i,j}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-j}S_{i,j}\right) \geqq \sigma_j^2\left(\sum_{i=1}^{n-j}\alpha_i\right)^2 = \sigma_j^2
$$

となる．$\alpha_i = S_{i,j}/(S_{1,j}+\cdots+S_{n-j,j})$ のとき，すなわち $\hat{f}'_j = \hat{f}_j$ のとき，等号が成立するので $V(\hat{f}'_j|\mathcal{G}_j)$ は最小値 $\sigma_j^2/\sum_{i=1}^{n-j}S_{i,j}$ をとる．

次に $V(\hat{f}'_j)$ について考える．命題 2.3 より

$$
V(\hat{f}'_j) = V(E[\hat{f}'_j|\mathcal{G}_j]) + E[V(\hat{f}'_j|\mathcal{G}_j)] = V(f_j) + E[V(\hat{f}'_j|\mathcal{G}_j)] = E[V(\hat{f}'_j|\mathcal{G}_j)]
$$

なので，上に示した不等式より

$$
V(\hat{f}'_j) \geqq E\left[\frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^{n-j}S_{i,j}}\right]
$$

となる．$\alpha_i = S_{i,j}/(S_{1,j}+\cdots+S_{n-j,j})$ のとき，すなわち $\hat{f}'_j = \hat{f}_j$ のとき，等号が成立するので $V(\hat{f}'_j)$ は最小値 $E[\sigma_j^2/\sum_{i=1}^{n-j}S_{i,j}]$ をとる． ∎

次の補題は第 3 節で必要となる：

補題 2.7 $j = 1,\ldots,n-1$ に対して，次が成立する：

$$
E[(f_j - \hat{f}_j)^2|\mathcal{G}_j] = \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^{n-j}S_{i,j}}.
$$

証明 系 2.5 より，

$$
\begin{aligned}
E[(f_j-\hat{f}_j)^2|\mathcal{G}_j] &= V(f_j-\hat{f}_j|\mathcal{G}_j) + E[f_j-\hat{f}_j|\mathcal{G}_j]^2 = V(\hat{f}_j|\mathcal{G}_j) = \frac{\sum_{i=1}^{n-j}V(S_{i,j+1}|\mathcal{G}_j)}{\left(\sum_{i=1}^{n-j}S_{i,j}\right)^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n-j}V(S_{i,j+1}|\mathcal{F}_{i,j})}{\left(\sum_{i=1}^{n-j}S_{i,j}\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j}S_{i,j}\sigma_j^2}{\left(\sum_{i=1}^{n-j}S_{i,j}\right)^2} = \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^{n-j}S_{i,j}}
\end{aligned}
$$

となる． ∎

2.3　$S_{i,j}$ の推定

命題 2.8 $i+j \geqq n+1$ のとき次が成立する：

$$E[S_{i,j}|\mathcal{F}] = S_{i,n+1-i} f_{n+1-i} \cdots f_{j-1}.$$

証明 $i=1,\ldots,n$ を固定し，帰納的に $j=n+1-i,\ldots,n$ に対して主張を証明する．事故年度に関する独立性より，左辺は $E[S_{i,j}|\mathcal{F}_{i,n+1-i}]$ に等しい．$j=n+1-i$ のときは $S_{i,j}=S_{i,n+1-i}\in\mathcal{F}_{i,n+1-i}$ なので主張は明らかである．j で正しいと仮定すると，

$$\begin{aligned}E[S_{i,j+1}|\mathcal{F}_{i,n+1-i}] &= E\big[E[S_{i,j+1}|\mathcal{F}_{i,j}]\big|\mathcal{F}_{i,n+1-i}\big] = E[S_{i,j}f_j|\mathcal{F}_{i,n+1-i}]\\ &= E[S_{i,j}|\mathcal{F}_{i,n+1-i}]f_j = S_{i,n+1-i}f_{n+1-i}\cdots f_{j-1}\cdot f_j \qquad \text{（帰納法の仮定）}\end{aligned}$$

となり，$j+1$ でも正しいことが分かる．∎

この命題から，次のように推定することが妥当であることが分かる：

推定 2.9 $i+j \geqq n+1$ のとき $S_{i,j}$ を次で推定する：

$$\hat{S}_{i,j} = S_{i,n+1-i}\hat{f}_{n+1-i}\cdots\hat{f}_{j-1}.$$

注意 2.10 $i+j=n+1$ のときは $S_{i,j}=S_{i,n+1-i}$ は既知で推定の必要はないが，このときも $\hat{S}_{i,j}$ を定義しておくと後に記法が簡便になる．

命題 2.11 $i+j \geqq n+1$ のとき $E[\hat{S}_{i,j}] = E[S_{i,j}]$ が成立する．

証明 より強く $E[\hat{S}_{i,j}|\mathcal{G}_{n+1-i}] = E[S_{i,j}|\mathcal{G}_{n+1-i}]$ であることを証明する．右辺は命題 2.8 より

$$E[S_{i,j}|\mathcal{G}_{n+1-i}] = E[S_{i,j}|\mathcal{F}_{i,n+1-i}] = E[S_{i,j}|\mathcal{F}] = S_{i,n+1-i}f_{n+1-i}\cdots f_{j-1}$$

となるので，$\hat{S}_{i,j}$ の定義と $S_{i,n+1-i}\in\mathcal{G}_{n+1-i}$ であることより $E[\hat{f}_{n+1-i}\cdots\hat{f}_{j-1}|\mathcal{G}_{n+1-i}] = f_{n+1-i}\cdots f_{j-1}$ であることを証明すればよい．$j=n+1-i$ のときは明らかである．j のときに等式が成立すると仮定すると，注意 2.2，系 2.5 より

$$\begin{aligned}E[\hat{f}_{n+1-i}\cdots\hat{f}_j|\mathcal{G}_{n+1-i}] &= E\big[E[\hat{f}_{n+1-i}\cdots\hat{f}_j|\mathcal{G}_j]\big|\mathcal{G}_{n+1-i}\big] = E[\hat{f}_{n+1-i}\cdots\hat{f}_{j-1}f_j|\mathcal{G}_{n+1-i}]\\ &= f_{n+1-i}\cdots f_{j-1}\cdot f_j \qquad \text{（帰納法の仮定）}\end{aligned}$$

となり，$j+1$ でも正しいことが分かる．∎

注意 2.12 $E[\hat{S}_{i,j}|\mathcal{F}] = E[S_{i,j}|\mathcal{F}]$ が成立するわけではない．実際，$\hat{S}_{i,j}$ は $\mathcal{F}$ の元の式で書けるので左辺は $\hat{S}_{i,j} = S_{i,n+1-i}\hat{f}_{n+1-i}\cdots\hat{f}_{j-1}$ に等しく，右辺は命題 2.8 より $S_{i,n+1-i}f_{n+1-i}\cdots f_{j-1}$ に等しい．

2.4 σ_j の推定

定義 2.13 $j = 1, \ldots, n-1$ に対して σ_j^2 を次で推定する：

$$\hat{\sigma}_j^2 = \begin{cases} \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j}(S_{i,j+1}/S_{i,j} - \hat{f}_j)^2 & (j = 1, \ldots, n-2), \\ \min\{(\hat{\sigma}_{n-2}^2)^2/\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2, \hat{\sigma}_{n-3}^2\} & (j = n-1). \end{cases}$$

命題 2.14 $j = 1, \ldots, n-2$ に対して $E[\hat{\sigma}_j^2] = \sigma_j^2$，すなわち $\hat{\sigma}_j^2$ は σ_j^2 の不偏推定量である．

証明 より強く，$E[\hat{\sigma}_j^2 | \mathcal{G}_j] = \sigma_j^2$ を証明する．簡単のため $T = \sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j+1}$, $U = \sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j}$ とおく．$\hat{f}_j = T/U$ であり，U は $\mathcal{G}_j$ の元の式で書け，$E[T|\mathcal{G}_j] = U f_j$ である．よって

$$\begin{aligned} (n-j-1)\hat{\sigma}_j^2 &= \sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j}\left(\frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}} - \hat{f}_j\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-j} \frac{S_{i,j+1}^2}{S_{i,j}} - 2\hat{f}_j \sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j+1} + \hat{f}_j^2 \sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n-j} \frac{S_{i,j+1}^2}{S_{i,j}} - 2 \cdot \frac{T}{U} \cdot T + \left(\frac{T}{U}\right)^2 U = \sum_{i=1}^{n-j} \frac{S_{i,j+1}^2}{S_{i,j}} - \frac{T^2}{U} \end{aligned}$$

となるので，

$$(n-j-1)E[\hat{\sigma}_j^2 | \mathcal{G}_j] = \sum_{i=1}^{n-j} \frac{E[S_{i,j+1}^2 | \mathcal{G}_j]}{S_{i,j}} - \frac{E[T^2 | \mathcal{G}_j]}{U}$$

を得る．ここで，$i = 1, \ldots, n-j$ に対して

$$E[S_{i,j+1}^2 | \mathcal{G}_j] = V(S_{i,j+1} | \mathcal{G}_j) + E[S_{i,j+1} | \mathcal{G}_j]^2 = V(S_{i,j+1} | \mathcal{F}_{i,j}) + E[S_{i,j+1} | \mathcal{F}_{i,j}]^2 = S_{i,j}\sigma_j^2 + S_{i,j}^2 f_j^2$$

であり，

$$\begin{aligned} E[T^2 | \mathcal{G}_j] &= V(T | \mathcal{G}_j) + E[T | \mathcal{G}_j]^2 = \sum_{i=1}^{n-j} V(S_{i,j+1} | \mathcal{G}_j) + \left(\sum_{i=1}^{n-j} E[S_{i,j+1} | \mathcal{G}_j]\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-j} V(S_{i,j+1} | \mathcal{F}_{i,j}) + \left(\sum_{i=1}^{n-j} E[S_{i,j+1} | \mathcal{F}_{i,j}]\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j}\sigma_j^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j} f_j\right)^2 \\ &= U\sigma_j^2 + U^2 f_j^2 \end{aligned}$$

なので，

$$(n-j-1)E[\hat{\sigma}_j^2 | \mathcal{G}_j] = \sum_{i=1}^{n-j} (\sigma_j^2 + S_{i,j} f_j^2) - (\sigma_j^2 + U f_j^2) = (n-j-1)\sigma_j^2$$

となり，命題が従う． ∎

3 Mack モデルによる区間推定

3.1 平均 2 乗誤差と信頼区間

今考察している問題を抽象的に表現すると，未知の確率変数 X（例えば $S_{n,n}$）を $\mathcal{F}$ の元の式で書ける確率変数 $\hat{X}$（例えば $\hat{S}_{n,n} = S_{n,1}\hat{f}_1 \cdots \hat{f}_{n-1}$）で推定するということになる．この推定がど

れくらい良いかを測る 1 つの指標が**平均 2 乗誤差** (mean squared error) であり，

$$\operatorname{mse}\hat{X} = E[(\hat{X}-X)^2|\mathcal{F}]$$

で定義される．$\hat{X}$ が $\mathcal{F}$ の元の式で書けることに注意して変形すると

$$\operatorname{mse}\hat{X} = V(\hat{X}-X|\mathcal{F}) + E[\hat{X}-X|\mathcal{F}]^2 = V(X|\mathcal{F}) + (E[X|\mathcal{F}]-\hat{X})^2$$

となり，平均 2 乗誤差は分散と推定誤差の和であることが分かる．前者は X と $E[X|\mathcal{F}]$ の差を表す指標である．

平均 2 乗誤差が分かると，Chebyshev の不等式

$$P\big(\{|\hat{X}-X| \geqq r\}\big|\mathcal{F}\big) \leqq \frac{E[(\hat{X}-X)^2|\mathcal{F}]}{r^2} = \frac{\operatorname{mse}\hat{X}}{r^2}$$

を用いて信頼区間を求めることができる．実際，$\alpha > 0$（例えば $\alpha = 0.05$）として $r = \sqrt{\alpha^{-1}\operatorname{mse}\hat{X}}$ とおくと，$P\big(\{|\hat{X}-X| \geqq r\}\big|\mathcal{F}\big) \leqq \alpha$ すなわち $P\big(\{|\hat{X}-X| < r\}\big|\mathcal{F}\big) \geqq 1-\alpha$ なので，開区間 $(\hat{X}-r, \hat{X}+r)$ は X の信頼水準 $1-\alpha$ 以上の信頼区間となる．

3.2 平均 2 乗誤差の推定

この小節では，いくつかの重要な確率変数に対する平均 2 乗誤差の推定を与える公式を述べる．根拠は次小節で与えられる．

推定 3.1 $i+j \geqq n+2$ のとき，$\operatorname{mse}\hat{S}_{i,j}$ を次で推定する：

$$(\operatorname{mse}\hat{S}_{i,j})\widehat{\ } = \hat{S}_{i,j}^2 \sum_{l=n+1-i}^{j-1} \frac{\hat{\sigma}_l^2}{\hat{f}_l^2}\left(\frac{1}{\hat{S}_{i,l}} + \frac{1}{\sum_{m=1}^{n-l} S_{m,l}}\right).$$

次の推定は [1] の主結果であり，[2] で Mack の公式と呼ばれている：

推定 3.2 支払備金 $T = \sum_{i=2}^{n}(S_{i,n} - S_{i,n+1-i})$ について，その推定量 $\hat{T} = \sum_{i=2}^{n}(\hat{S}_{i,n} - S_{i,n+1-i})$ の平均 2 乗誤差 $\operatorname{mse}\hat{T}$ を次で推定する：

$$\begin{aligned}(\operatorname{mse}\hat{T})\widehat{\ } = \sum_{i=2}^{n}&\left(\hat{S}_{i,n}^2 \sum_{l=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_l^2}{\hat{f}_l^2}\left(\frac{1}{\hat{S}_{i,l}} + \frac{1}{\sum_{m=1}^{n-l} S_{m,l}}\right)\right) \\ &+ 2\sum_{i=2}^{n-1} \hat{S}_{i,n}\left(\sum_{i'=i+1}^{n} \hat{S}_{i',n}\right)\left(\sum_{l=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_l^2}{\hat{f}_l^2 \sum_{m=1}^{n-l} S_{m,l}}\right).\end{aligned}$$

注意 3.3 上式に現れる $S_{m,l}$ は，$m+l \leqq (n-l)+l = n$ なので $\mathcal{F}$ の元である．

推定 3.4 次年度の支払保険金 $T = \sum_{i=2}^{n}(S_{i,n+2-i} - S_{i,n+1-i})$ について，その推定量 $\hat{T} = \sum_{i=2}^{n}(\hat{S}_{i,n+2-i} - S_{i,n+1-i})$ の平均 2 乗誤差 $\operatorname{mse}\hat{T}$ を次で推定する：

$$(\operatorname{mse}\hat{T})\widehat{\ } = \sum_{i=2}^{n} \hat{S}_{i,n+2-i}^2 \frac{\hat{\sigma}_{n+1-i}^2}{\hat{f}_{n+1-i}^2}\left(\frac{1}{\hat{S}_{i,n+1-i}} + \frac{1}{\sum_{m=1}^{i-1} S_{m,n+1-i}}\right).$$

3.3 平均 2 乗誤差の推定の根拠

3.3.1 一般化

前小節で述べた平均 2 乗誤差の推定は，すべて次の推定の特別な場合である：

推定 3.5 各 $i = 1, \ldots, n$ に対して $n+1-i \leqq j_i \leqq k_i \leqq n$ なる j_i, k_i が定まっているとする．$T = \sum_{i=1}^{n}(S_{i,k_i} - S_{i,j_i})$ について，その推定量 $\hat{T} = \sum_{i=1}^{n}(\hat{S}_{i,k_i} - \hat{S}_{i,j_i})$ の平均 2 乗誤差 $\operatorname{mse}\hat{T}$ を次で推定する：

$$(\operatorname{mse}\hat{T})\widehat{\ } = \sum_{i,l=1}^{n} \frac{\hat{\varphi}_{i,l}^2 \hat{\sigma}_l^2}{\hat{S}_{i,l}\hat{f}_l^2} + \sum_{i,i',l=1}^{n} \frac{\hat{\varphi}_{i,l}\hat{\varphi}_{i',l}\hat{\sigma}_l^2}{\hat{f}_l^2 \sum_{m=1}^{n-l} S_{m,l}}.$$

ただし，$i, l = 1, \ldots, n$ に対して $\hat{\varphi}_{i,l}$ を次で定義する：

$$\hat{\varphi}_{i,l} = \begin{cases} \hat{S}_{i,k_i} - \hat{S}_{i,j_i} & (n+1-i \leqq l < j_i), \\ \hat{S}_{i,k_i} & (j_i \leqq l < k_i), \\ 0 & (1 \leqq l < n+1-i,\ k_i \leqq l \leqq n). \end{cases}$$

注意 3.6 $(\operatorname{mse}\hat{T})\widehat{\ }$ の式の 1 つめの $\sum$ の中に $\hat{S}_{i,l}$ が現れており，これは $i + l \leqq n$ のときは定義されていないが，このときは分子の $\hat{\varphi}_{i,l}$ が 0 なので問題ない．また，$l = n$ に対する $\hat{f}_l$, $\hat{\sigma}_l$ も定義されていないが，同様の理由で問題ない．

例 3.7 (1) $j_i = n+1-i$, $k_i = n$ とおくと $T = \sum_{i=2}^{n}(S_{i,n} - S_{i,n+1-i})$ となり，推定 3.2 を得る．

(2) $j_i = n+1-i$, $k_1 = n$, $k_i = n+2-i$ $(i \geqq 2)$ とおくと $T = \sum_{i=2}^{n}(S_{i,n+2-i} - S_{i,n+1-i})$ となり，推定 3.4 を得る．

(3) $p + q \geqq n+2$ なる p, q を固定し，$j_i = k_i = n+1-i$ $(i \neq p)$, $j_p = n+1-p$, $k_p = q$ とおくと $T = S_{p,q} - S_{p,n+1-p}$ となる．このとき $\hat{T} = \hat{S}_{p,q} - S_{p,n+1-p}$ より $\hat{T} - T = \hat{S}_{p,q} - S_{p,q}$ なので $\operatorname{mse}\hat{T} = \operatorname{mse}\hat{S}_{p,q}$ となり，推定 3.1 を得る．

以下，推定 3.5 の根拠を述べる．j_i, k_i, T, $\hat{\varphi}_{i,l}$ は推定 3.5 のように定義されているとする．$\operatorname{mse}\hat{T}$ を分散と推定誤差に分解すると

$$\begin{aligned} \operatorname{mse}\hat{T} &= V(T|\mathcal{F}) + (E[T|\mathcal{F}] - \hat{T})^2 \\ &= V\left(\sum_{i=1}^{n}(S_{i,k_i} - S_{i,j_i})\middle|\mathcal{F}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\big(E[S_{i,k_i} - S_{i,j_i}|\mathcal{F}] - (\hat{S}_{i,k_i} - \hat{S}_{i,j_i})\big)\right)^2 \end{aligned}$$

となることに注意し，これらを別々に推定する．記法の簡便のため，$i + j \geqq n+1$ のとき $g_j = f_{n+1-i}\cdots f_{j-1}$, $\hat{g}_j = \hat{f}_{n+1-i}\cdots\hat{f}_{j-1}$ と書く．定義より $g_{j+1} = g_j f_j$, $\hat{g}_{j+1} = \hat{g}_j\hat{f}_j$ が成立する．注意 2.2，系 2.5 より $\hat{g}_j$ は $\mathcal{G}_j$ の元の式で書け，$E[\hat{g}_{j+1}|\mathcal{G}_j] = f_j\hat{g}_j$ が成立する．また，命題 2.8 より $E[S_{i,j}|\mathcal{F}] = S_{i,n+1-i}g_j$ であり，推定 2.9 より $\hat{S}_{i,j} = S_{i,n+1-i}\hat{g}_j$ である．

3.3.2 分散の推定

補題 3.8 $i+j \geqq n+1$ のとき次が成立する：

$$V(S_{i,j}|\mathcal{F}) = \sum_{l=n+1-i}^{j-1} \frac{S_{i,n+1-i} g_j^2 \sigma_l^2}{g_l f_l^2}.$$

証明 $l = n+1-i, \ldots, j-1$ に対して

$$\begin{aligned} V(S_{i,l+1}|\mathcal{F}) &= V(S_{i,l+1}|\mathcal{F}_{i,n+1-i}) = E[V(S_{i,l+1}|\mathcal{F}_{i,l})|\mathcal{F}_{i,n+1-i}] + V(E[S_{i,l+1}|\mathcal{F}_{i,l}]|\mathcal{F}_{i,n+1-i}) \\ &= E[S_{i,l}\sigma_l^2|\mathcal{F}_{i,n+1-i}] + V(S_{i,l} f_l|\mathcal{F}_{i,n+1-i}) = S_{i,n+1-i} g_l \sigma_l^2 + V(S_{i,l}|\mathcal{F}) f_l^2 \end{aligned}$$

なので，両辺を g_{l+1}^2 で割ると

$$\frac{V(S_{i,l+1}|\mathcal{F})}{g_{l+1}^2} = \frac{S_{i,n+1-i} g_l \sigma_l^2}{g_{l+1}^2} + \frac{V(S_{i,l}|\mathcal{F}) f_l^2}{g_{l+1}^2} = \frac{S_{i,n+1-i}\sigma_l^2}{g_l f_l^2} + \frac{V(S_{i,l}|\mathcal{F})}{g_l^2}$$

となり，l に関する和をとると

$$\frac{V(S_{i,j}|\mathcal{F})}{g_j^2} = \sum_{l=n+1-i}^{j-1} \frac{S_{i,n+1-i}\sigma_l^2}{g_l f_l^2} + V(S_{i,n+1-i}|\mathcal{F})$$

を得る．$S_{i,n+1-i} \in \mathcal{F}$ より $V(S_{i,n+1-i}|\mathcal{F}) = 0$ なので，補題が成立することが分かる． ∎

ここで，$i, l = 1, \ldots, n$ に対して $\varphi_{i,l}$ を次で定義する：

$$\varphi_{i,l} = \begin{cases} E[S_{i,k_i}|\mathcal{F}] - E[S_{i,j_i}|\mathcal{F}] & (n+1-i \leqq l < j_i), \\ E[S_{i,k_i}|\mathcal{F}] & (j_i \leqq l < k_i), \\ 0 & (1 \leqq l < n+1-i,\ k_i \leqq l \leqq n). \end{cases}$$

補題 3.9 次が成立する：

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} (S_{i,k_i} - S_{i,j_i}) \middle| \mathcal{F}\right) = \sum_{i,l=1}^{n} \frac{\varphi_{i,l}^2 \sigma_l^2}{E[S_{i,l}|\mathcal{F}] f_l^2}.$$

証明 事故年度に関する独立性より左辺は $\sum_{i=1}^{n} V(S_{i,k_i} - S_{i,j_i}|\mathcal{F})$ に等しいので，任意の i に対して

$$V(S_{i,k_i} - S_{i,j_i}|\mathcal{F}) = \sum_{l=n+1-i}^{k_i-1} \frac{\varphi_{i,l}^2 \sigma_l^2}{E[S_{i,l}|\mathcal{F}] f_l^2}$$

であることを証明すればよい（$n+1-i \leqq l \leqq k_i - 1$ でないような l については $\varphi_{i,l} = 0$ であることに注意）．$i = 1, \ldots, n$ を任意にとって固定し，$j_i = j$, $k_i = k$ と書く．

$l = j, \dots, k-1$ に対して

$$
\begin{aligned}
V\left(\frac{S_{i,l+1}g_k}{g_{l+1}} - S_{i,j}\middle|\mathcal{F}\right) &= V\left(\frac{S_{i,l+1}g_k}{g_{l+1}} - S_{i,j}\middle|\mathcal{F}_{i,n+1-i}\right) \\
&= E\left[V\left(\frac{S_{i,l+1}g_k}{g_{l+1}} - S_{i,j}\middle|\mathcal{F}_{i,l}\right)\middle|\mathcal{F}_{i,n+1-i}\right] + V\left(E\left[\frac{S_{i,l+1}g_k}{g_{l+1}} - S_{i,j}\middle|\mathcal{F}_{i,l}\right]\middle|\mathcal{F}_{i,n+1-i}\right) \\
&= E\left[\frac{S_{i,l}\sigma_l^2 g_k^2}{g_{l+1}^2}\middle|\mathcal{F}_{i,n+1-i}\right] + V\left(\frac{S_{i,l}f_l g_k}{g_{l+1}} - S_{i,j}\middle|\mathcal{F}_{i,n+1-i}\right) \\
&= \frac{S_{i,n+1-i}g_l\sigma_l^2 g_k^2}{g_{l+1}^2} + V\left(\frac{S_{i,l}f_l g_k}{g_{l+1}} - S_{i,j}\middle|\mathcal{F}\right) \\
&= \frac{S_{i,n+1-i}\sigma_l^2 g_k^2}{g_l f_l^2} + V\left(\frac{S_{i,l}g_k}{g_l} - S_{i,j}\middle|\mathcal{F}\right)
\end{aligned}
$$

であり，このような l に関する和をとると

$$
V(S_{i,k} - S_{i,j}|\mathcal{F}) = \sum_{l=j}^{k-1} \frac{S_{i,n+1-i}\sigma_l^2 g_k^2}{g_l f_l^2} + V\left(\frac{S_{i,j}g_k}{g_j} - S_{i,j}\middle|\mathcal{F}\right)
$$

となる．ここで，

$$
\sum_{l=j}^{k-1} \frac{S_{i,n+1-i}\sigma_l^2 g_k^2}{g_l f_l^2} = \sum_{l=j}^{k-1} \frac{(S_{i,n+1-i}g_k)^2\sigma_l^2}{S_{i,n+1-i}g_l f_l^2} = \sum_{l=j}^{k-1} \frac{E[S_{i,k}|\mathcal{F}]^2\sigma_l^2}{E[S_{i,l}|\mathcal{F}]f_l^2} = \sum_{l=j}^{k-1} \frac{\varphi_{i,l}^2\sigma_l^2}{E[S_{i,l}|\mathcal{F}]f_l^2}
$$

であり，補題 3.8 より

$$
\begin{aligned}
V\left(\frac{S_{i,j}g_k}{g_j} - S_{i,j}\middle|\mathcal{F}\right) &= \left(\frac{g_k}{g_j} - 1\right)^2 V(S_{i,j}|\mathcal{F}) = \left(\frac{g_k}{g_j} - 1\right)^2 \sum_{l=n+1-i}^{j-1} \frac{S_{i,n+1-i}g_j^2\sigma_l^2}{g_l f_l^2} \\
&= \sum_{l=n+1-i}^{j-1} \frac{(S_{i,n+1-i}g_k - S_{i,n+1-i}g_j)^2\sigma_l^2}{S_{i,n+1-i}g_l f_l^2} \\
&= \sum_{l=n+1-i}^{j-1} \frac{(E[S_{i,k}|\mathcal{F}] - E[S_{i,j}|\mathcal{F}])^2\sigma_l^2}{E[S_{i,l}|\mathcal{F}]f_l^2} = \sum_{l=n+1-i}^{j-1} \frac{\varphi_{i,l}^2\sigma_l^2}{E[S_{i,l}|\mathcal{F}]f_l^2}
\end{aligned}
$$

なので求める等式が示された． ∎

この補題より $V\left(\sum_{i=1}^n (S_{i,k_i} - S_{i,j_i})\middle|\mathcal{F}\right)$ の推定量

$$
\widehat{V\left(\sum_{i=1}^n (S_{i,k_i} - S_{i,j_i})\middle|\mathcal{F}\right)} = \sum_{i,l=1}^n \frac{\hat{\varphi}_{i,l}^2\hat{\sigma}_l^2}{\hat{S}_{i,l}\hat{f}_l^2}
$$

が得られる．

3.3.3 推定誤差の推定

$i = 1, \dots, n$ に対して $\Phi_i = E[S_{i,k_i} - S_{i,j_i}|\mathcal{F}] - (\hat{S}_{i,k_i} - \hat{S}_{i,j_i})$ とおくと，推定すべき推定誤差は

$$
\left(\sum_{i=1}^n \Phi_i\right)^2 = \sum_{i,i'=1}^n \Phi_i\Phi_{i'}
$$

なので，各 $i, i' = 1, \ldots, n$ に対して $\Phi_i \Phi_{i'}$ を

$$(\Phi_i \Phi_{i'})\widehat{\ } = \sum_{l=1}^{n} \frac{\hat{\varphi}_{i,l} \hat{\varphi}_{i',l} \hat{\sigma}_l^2}{\hat{f}_l^2 \sum_{m=1}^{n-l} S_{m,l}}$$

で推定する根拠を述べればよい．$i, i' = 1, \ldots, n$ を任意にとって固定し，$j_i = j$, $k_i = k$, $j_{i'} = j'$, $k_{i'} = k'$ と書く．

まず，

$$\begin{aligned}
\Phi_i &= E[S_{i,k} - S_{i,j} | \mathcal{F}] - (\hat{S}_{i,k} - \hat{S}_{i,j}) = S_{i,n+1-i}(g_k - g_j - \hat{g}_k + \hat{g}_j) \\
&= S_{i,n+1-i}\left(1 - \frac{\hat{g}_j}{g_j}\right)(g_k - g_j) + S_{i,n+1-i} g_k \left(\frac{\hat{g}_j}{g_j} - \frac{\hat{g}_k}{g_k}\right) \\
&= S_{i,n+1-i} \sum_{l=n+1-i}^{j-1} \left(\frac{\hat{g}_l}{g_l} - \frac{\hat{g}_{l+1}}{g_{l+1}}\right)(g_k - g_j) + S_{i,n+1-i} g_k \sum_{l=j}^{k-1} \left(\frac{\hat{g}_l}{g_l} - \frac{\hat{g}_{l+1}}{g_{l+1}}\right)
\end{aligned}$$

であることに注意して

$$\psi_l = \begin{cases} S_{i,n+1-i}(\hat{g}_l/g_l - \hat{g}_{l+1}/g_{l+1})(g_k - g_j) & (n+1-i \leqq l < j), \\ S_{i,n+1-i} g_k (\hat{g}_l/g_l - \hat{g}_{l+1}/g_{l+1}) & (j \leqq l < k), \\ 0 & (1 \leqq l < n+1-i,\ k \leqq l \leqq n) \end{cases}$$

とおくと $\Phi_i = \sum_{l=1}^n \psi_l$ が成立する．同様に ψ'_l を定めると $\Phi_{i'} = \sum_{l=1}^n \psi'_l$ が成立する．これより $\Phi_i \Phi_{i'} = \sum_{l,l'=1}^n \psi_l \psi'_{l'}$ となる．

補題 3.10 $l, l' = 1, \ldots, n$ に対して，次が成立する：

$$E[\psi_l \psi'_{l'} | \mathcal{G}_{\max\{l,l'\}}] = \begin{cases} \frac{\varphi_{i,l} \varphi_{i',l} \hat{g}_l^2 \sigma_l^2}{g_{l+1}^2 \sum_{m=1}^{n-l} S_{m,l}} & (l = l'), \\ 0 & (l \neq l'). \end{cases}$$

証明 $\hat{g}_l$ が $\mathcal{G}_l$ の元の式で書けることから ψ_l, ψ'_l は $\mathcal{G}_{l+1}$ の元の式で書ける．また，$E[\hat{g}_{l+1} | \mathcal{G}_l] = f_l \hat{g}_l$ より

$$E\left[\frac{\hat{g}_l}{g_l} - \frac{\hat{g}_{l+1}}{g_{l+1}} \middle| \mathcal{G}_l\right] = \frac{\hat{g}_l}{g_l} - \frac{f_l \hat{g}_l}{g_{l+1}} = 0$$

なので，$E[\psi_l | \mathcal{G}_l] = 0$, $E[\psi'_l | \mathcal{G}_l] = 0$ が成立する．これらを用いて補題の等式を示す．

まず $l \neq l'$ のときを考える．$l < l'$ としても一般性を失わず，このとき

$$E[\psi_l \psi'_{l'} | \mathcal{G}_{\max\{l,l'\}}] = E[\psi_l \psi'_{l'} | \mathcal{G}_{l'}] = \psi_l E[\psi'_{l'} | \mathcal{G}_{l'}] = 0$$

となり確かに補題が成立する．

次に $l = l'$ のときを考える．$l = n$ のときは $\psi_l = \psi'_l = 0$, $\varphi_{i,l} = \varphi_{i',l} = 0$ となり補題は成立するので，以下 $l = 1, \ldots, n-1$ とする．補題 2.7 より

$$E\left[\left(\frac{\hat{g}_l}{g_l} - \frac{\hat{g}_{l+1}}{g_{l+1}}\right)^2 \middle| \mathcal{G}_l\right] = \frac{\hat{g}_l^2}{g_{l+1}^2} E[(f_l - \hat{f}_l)^2 | \mathcal{G}_l] = \frac{\hat{g}_l^2 \sigma_l^2}{g_{l+1}^2 \sum_{m=1}^{n-l} S_{m,l}}$$

なので，$n+1-i \leqq l < j$ かつ $n+1-i' \leqq l < j'$ のときは

$$
\begin{aligned}
E[\psi_l \psi_l' | \mathcal{G}_l] &= S_{i,n+1-i}(g_k - g_j) \cdot S_{i',n+1-i'}(g_{k'} - g_{j'}) \cdot \frac{\hat{g}_l^2 \sigma_l^2}{g_{l+1}^2 \sum_{m=1}^{n-l} S_{m,l}} \\
&= \frac{(E[S_{i,k}|\mathcal{F}] - E[S_{i,j}|\mathcal{F}])(E[S_{i',k'}|\mathcal{F}] - E[S_{i',j'}|\mathcal{F}])\hat{g}_l^2 \sigma_l^2}{g_{l+1}^2 \sum_{m=1}^{n-l} S_{m,l}} \\
&= \frac{\varphi_{i,l}\varphi_{i',l}\hat{g}_l^2 \sigma_l^2}{g_{l+1}^2 \sum_{m=1}^{n-l} S_{m,l}}
\end{aligned}
$$

となる．他の範囲にある l に対しても同様である． ∎

この補題より，$\Phi_i \Phi_{i'} = \sum_{l,l'=1}^{n} \psi_l \psi_{l'}'$ を

$$
\sum_{l,l'=1}^{n} E[\psi_l \psi_{l'}' | \mathcal{G}_{\max\{l,l'\}}] = \sum_{l=1}^{n} \frac{\varphi_{i,l}\varphi_{i',l}\hat{g}_l^2 \sigma_l^2}{g_{l+1}^2 \sum_{m=1}^{n-l} S_{m,l}}
$$

で近似し，さらに右辺を推定することで

$$
(\Phi_i \Phi_{i'})\widehat{\ } = \sum_{l=1}^{n} \frac{\hat{\varphi}_{i,l}\hat{\varphi}_{i',l}\hat{g}_l^2 \hat{\sigma}_l^2}{\hat{g}_{l+1}^2 \sum_{m=1}^{n-l} S_{m,l}} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\hat{\varphi}_{i,l}\hat{\varphi}_{i',l}\hat{\sigma}_l^2}{\hat{f}_l^2 \sum_{m=1}^{n-l} S_{m,l}}
$$

を得る．

参考文献

[1] Thomas Mack, *Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates*, ASTIN Bulletin, Vol. 23, No. 2, 1993, pp. 213–225.

[2] Mario V. Wüthrich and Michael Merz, *Stochastic claims reserving methods in insurance*, Wiley, 2008.

ランダムウォークモデルについて

谷 口 説 男
九州大学大学院数理学研究院

はじめに

累計支払保険金を見積る確率モデルの一つであるランダムウォークモデルは D. Heyer [1] により導入された．このロスディベラップメント・モデルは，数理ファイナンスにおいて基本的な役割りを果たす幾何ブラウン運動を利用するモデルである．本報告では，支払年度別の支払保険金の推測値について，その条件付分布と対応する信頼区間について，Hirotsu-Taniguchi([2]) に基いて紹介する．

ランダムウォークモデルにおいては，経過年数 t の累計支払保険金 P_t は，

$$dP_t = \mu(t)P_t dt + \sigma(t)P_t dB_t$$

という確率微分方程式に従うと仮定している．ただし，$\mu, \sigma : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は連続関数であり，dB_t は 1 次元ブラウン運動 $\{B_t\}_{t\geqq 0}$ に関する伊藤積分を表している (伊藤積分については A 節を参照)．もし $\mu(t)$，$\sigma(t)$ が共に定数関数であれば，$\{P_t\}_{t\geqq 0}$ は，数理ファイナンスの基礎モデルであるブラック-ショールズ・モデルで用いられる幾何ブラウン運動となる．

$n \in \mathbb{N}$ とする．$1 \leqq i \leqq n$，$t \geqq 0$ に対し，S_t^i を事故年度 i，経過年数 t の累計支払保険金とする (下図参照)．本報告では，各累計支払保険金 S_t^i が，P_t と同じ確率微分方程式に従うと仮定する．

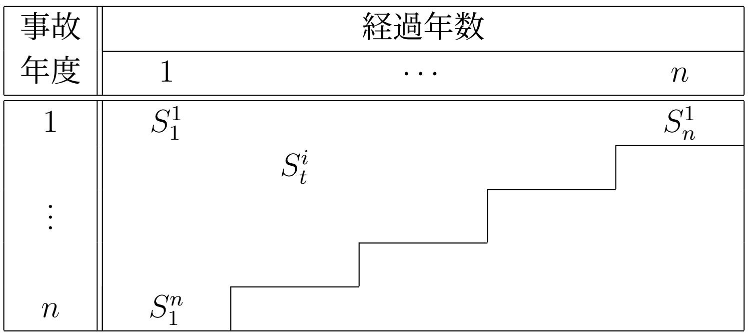

図 1: ランオフ三角形

すなわち，次を仮定する．

$$dS_t^i = \mu(t)S_t^i dt + \sigma(t)S_t^i dB_t^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

ただし，$\{B_t^1\}_{t\geqq 0}, \ldots, \{B_t^n\}_{t\geqq 0}$ は，$B_0^i = 0$，$i = 1, 2, \ldots, n$，を満す，独立な 1 次元ブラウン運動である．伊藤の公式により S_t^i は次のように表現できる．(B 節命題 B.1 参照)．

$$S_t^i = S_s^i \exp\Big(\nu(s;t) + \int_s^t \sigma(u)dB_u^i\Big). \tag{2}$$

ただし，

$$\nu(s;t) = \int_s^t \bigl\{\mu(u) - \tfrac{1}{2}\sigma^2(u)\bigr\}du.$$

$n+1 < k \leqq 2n$ を満す k に対し，T_k を次で定める．

$$T_k = \sum_{i=0}^{2n-k} \{S^{n-i}_{k-n+i} - S^{n-i}_{k-n+i-1}\}. \tag{3}$$

T_k は，k 年度に支払われる年度別支払保険金を表している (図 2 参照)．本報告では，n 年度末の

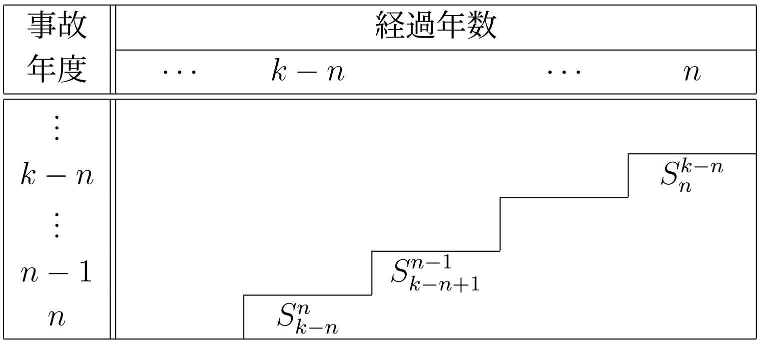

図 2: 年度別支払保険金 T_k

総支払保険金を既知とし，そのもとでの T_k の条件付分布，信頼区間を求める．詳しく述べると次のようになる．$r_j > 0$，$1 \leqq j \leqq n$，を満す $r = (r_1, \ldots, r_n)$ を採る．$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を，ブラウン運動 $\{B^i_t\}_{t\geqq 0}$，$1 \leqq i \leqq n$，が定義されている確率空間とする．$j + \ell = n+1$ なる $1 \leqq j, \ell \leqq n$ に対し $S^j_\ell = r_j$ という条件をつけた P の条件付確率を $P^{(r)}$ と表す (条件付けについては，図 3 を参照);

$$P^{(r)}(A) = P\bigl(A \,\big|\, S^1_n = r_1, S^2_{n-1} = r_2, \ldots, S^n_1 = r_n\bigr) \quad A \in \mathcal{F}.$$

本報告では，$P^{(r)}$ の下での T_k の分布とその信頼区間を求める．

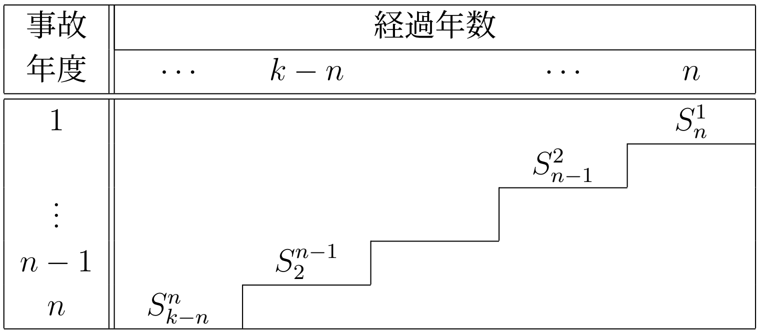

図 3: 条件付け

以下の 1∼3 節で，主要な結果について述べる．そこで用いられる数学的事実の証明は，A，B 節で与える．以下において，S^i_t の経年を表す添字 t は，自然数 $\mathbb{N}$ に属するものとする．例えば，$\{S_t\}_{t\geqq 0}$ は $\{S_t\}_{t=1,2,\ldots}$ を意味している．

1　分布密度関数

S_t^i，T_k，$P^{(r)}$ などは全て前節の通りとする．本節では，$P^{(r)}$ の下での T_k の分布密度関数を求める．

記号を導入する．確率変数 X がパラメータ (m,v) の対数正規分布に従う ($X \sim LN(m,v)$ と表す) とは，X が次で与えられる分布密度関数 $f_{m,v}$ を持つことをいう．

$$P(X \leqq a) = \int_{-\infty}^{a} f_{m,v}(x)dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$
$$f_{m,v}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}\,x} e^{-(\log x - m)^2/2v} \mathcal{X}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ただし，$\mathcal{X}_A$ は A の定義関数である;

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

$X \sim LN(m,v)$ ならば $\log X$ は平均 m，分散 v の正規分布にしたがう．逆に Y が平均 m，分散 v の正規分布にしたがえば，$e^Y \sim LN(m,v)$ である．

関数 $f_{m,v;\ell,u} : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ を次で定義する．

$$f_{m,v;\ell,u}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{m,v}\Big(\frac{z}{w}+1\Big) f_{\ell,u}(w)\frac{1}{w}dw, \quad z \in \mathbb{R}.$$

$S_{k-n+i}^{n-i} - S_{k-n+i-1}^{n-i}$，$i=0,\ldots,2n-k$，は，$P^{(r)}$ の下，独立である (B 節命題 B.2)．したがって，T_k の分布は $S_{k-n+i}^{n-i} - S_{k-n+i-1}^{n-i}$ の分布の合成積として得られる (後述の定理 1.1 参照)．よって，$P^{(r)}$ の下，での $S_{k-n+i}^{n-i} - S_{k-n+i-1}^{n-i}$ の分布を求めればよい．

条件付期待値の定義より，$P^{(r)}$ の下，次が成り立つ．

$$S_{k-n+i}^{n-i} - S_{k-n+i-1}^{n-i} = \left[\frac{S_{k-n+i}^{n-i}}{S_{k-n+i-1}^{n-i}} - 1\right] \times \frac{S_{k-n+i-1}^{n-i}}{S_{i+1}^{n-i}} \times r_{n-i}. \tag{4}$$

まず $k > n+2$ とする．B 節命題 B.2 により，$S_{k-n+i}^{n-i}/S_{k-n+i-1}^{n-i}$ と $S_{k-n+i-1}^{n-i}/S_{i+1}^{n-i}$ は独立であり，

$$\frac{S_{k-n+i}^{n-i}}{S_{k-n+i-1}^{n-i}} \sim LN\big(\nu(k-n+i-1;k-n+i), \sigma^2(k-n+i-1;k-n+i)\big),$$
$$\frac{S_{k-n+i-1}^{n-i}}{S_{i+1}^{n-i}} \sim LN\big(\nu(i+1;k-n+i-1), \sigma^2(i+1;k-n+i-1)\big)$$

である．ただし，

$$\sigma^2(s;t) = \int_s^t \sigma(u)^2 du.$$

これより，

$$m(i,k) = \nu(k-n+i-1;k-n+i), \quad v(i,k) = \sigma^2(k-n+i-1;k-n+i),$$
$$\ell(i,k;r) = \nu(i+1;k-n+i-1) + \log r_{n-i}, \quad u(i,k) = \sigma^2(i+1;k-n+i-1),$$

$$f_{k,r}^i = f_{m(i,k),v(i,k);\ell(i,k;r),u(i,k)},$$

と置けば，B 節命題 B.6 により，$f^i_{k,r}$ は $P^{(r)}$ の下での $S^{n-i}_{k-n+i} - S^{n-i}_{k-n+i-1}$ の分布密度関数と成る;

$$P^{(r)}\Big(S^{n-i}_{k-n+i} - S^{n-i}_{k-n+i-1} \leqq a\Big) = \int_{-\infty}^{a} f^i_{k,r}(x)dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

つぎに $k = n+2$ とする．このとき，式 (4) の右辺の項 $S^{n-i}_{k-n+i-1}/S^{n-i}_{i+1}$ は，1 となる．したがって

$$P^{(r)}\Big(S^{n-i}_{k-n+i} - S^{n-i}_{k-n+i-1} \leqq a\Big) = P^{(r)}\bigg(r_{n-i}\frac{S^{n-i}_{n-k+i}}{S^{n-i}_{n-k+i-1}} \leqq a + r_{n-i}\bigg).$$

よって

$$m(i;r) = \nu(i+1;i+2) + \log r_{n-i}, \quad v(i) = \sigma^2(i+1;i+2),$$
$$f^i_{n+2,r}(x) = f_{m(i;r),v(i)}(x - r_{n-i}), \quad x \in \mathbb{R},$$

とおけば，B 節命題 B.6 により，$f^i_{n+2,r}$ は $P^{(r)}$ の下での $S^{n-i}_{k-n+i} - S^{n-i}_{k-n+i-1}$ の分布密度関数である;

$$P\Big(S^{n-i}_{k-n+i} - S^{n-i}_{k-n+i-1} \leqq a\Big) = \int_{-\infty}^{a} f^i_{n+2,r}(x)dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

以上をまとめれば次の主張となる．

定理 1.1 $f^i_{k,r}$ を上の通りとする．

$$f_{k,r} = f^0_{k,r} * f^1_{k,r} * \cdots * f^{2n-k}_{k,r}$$

とおく．ただし，$*$ は合成積を表す; すなわち

$$f_{k,r}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f^0_{k,r}(x-x_0)f^1_{k,r}(x_0-x_1)\cdots f^{2n-k}_{k,r}(x_{2n-k-1}-x_{2n-k})\,dx_0\cdots dx_{2n-k}.$$

このとき，$f_{k,r}$ は $P^{(r)}$ の下での T_k の分布密度関数である;

$$P^{(r)}\big(T_k \leqq a\big) = \int_{-\infty}^{a} f_{k,r}(x)dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

2 信頼区間

まず $P^{(r)}$ の下での T_k の期待値 $t_k(r)$ を求める．
$P^{(r)}$ の下，次式が成り立つ．

$$S^{n-i}_t = r_{n-i}\frac{S^{n-i}_t}{S^{n-i}_{i+1}}$$

B 節命題 B.2 により，$P^{(r)}$ の下

$$\frac{S^{n-i}_t}{S^{n-i}_{i+1}} \sim LN(\nu(i+1;t), \sigma^2(i+1;t)).$$

したがって

$$E_{P^{(r)}}\left[\frac{S^{n-i}_t}{S^{n-i}_{i+1}}\right] = e^{\mu(i+1;k-n+i)}$$

となる．ただし，$E_{P^{(r)}}$ は $P^{(r)}$ に関する期待値を表し，

$$\mu(s;t)=\int_s^t \mu(u)du=\nu(s;t)+\frac{1}{2}\sigma^2(s;t).$$

よって

$$t_k(r)=E_{P^{(r)}}[T_k]=\sum_{i=0}^{2n-k} r_{n-i}\big\{e^{\mu(i+1;k-n+i)}-e^{\mu(i+1;k-n+i-1)}\big\}.$$

信頼区間を考察しよう．$\alpha\in(0,100)$ に対し，B^r_α と R^r_α を

$$\int_{t_k(r)-B^r_\alpha}^{t_k(r)+B^r_\alpha} f_{k,r}(x)dx=1-\frac{\alpha}{100}=\int_0^{R^r_\alpha} f_{k,r}(x)dx$$

を満すように選ぶ．このとき

$$P^{(r)}\big(T_k\notin(t_k(r)-B^r_\alpha,t_k(r)+B^r_\alpha)\big)=\frac{\alpha}{100},\quad P^{(r)}\big(T_k\geqq R^r_\alpha\big)=\frac{\alpha}{100}$$

が成り立つ．これより次を得る．

命題 2.1 (i) $(t_k(r)-B^r_\alpha,t_k(r)+B^r_\alpha)$ は，T_k の $(100-\alpha)$%両側信頼区間である．
(ii) $[0,R^r_\alpha)$ は，T_k の $(100-\alpha)$%片側信頼区間である．

これより，$(100-\alpha)$%の確からしさで，年度 k の年度別支払保険金は高々 R^r_α であるといえる．

チェビショフの不等式を利用すれば，分散だけから定まる，より具体的な信頼区間を求めることも可能である．以下では，確率変数 X の $P^{(r)}$ に関する分散を $V_{P^{(r)}}(X)$ と表す．

チェビショフの不等式により，次の評価式が成り立つ．

$$P^{(r)}\Big(|T_k-t_k(r)|\geqq C\Big)\leqq\frac{1}{C^2}V_{P^{(r)}}(T_k),\quad C>0. \tag{5}$$

B 節命題 B.2 により，$S^{n-i}_{k-n+i}-S^{n-i}_{k-n+i-1}$，$0\leqq i\leqq 2n-k$，は独立である．よって

$$V_{P^{(r)}}(T_k)=\sum_{i=0}^{2n-k} V_{P^{(r)}}(S^{n-i}_{k-n+i}-S^{n-i}_{k-n+i-1}) \tag{6}$$

が成り立つ．(4) により，

$$V_{P^{(r)}}(S^{n-i}_{k-n+i}-S^{n-i}_{k-n+i-1})=r^2_{n-i}V_{P^{(r)}}\left(\left[\frac{S^{n-i}_{k-n+i}}{S^{n-i}_{k-n+i-1}}-1\right]\times\frac{S^{n-i}_{k-n+i-1}}{S^{n-i}_{i+1}}\right).$$

これと命題 B.2，B.6 と (6) を式 (5) に代入すれば，

$$P^{(r)}\big(|T_k-t_k(r)|\geqq C\big)\leqq\frac{1}{C^2}\sum_{i=0}^{2n-k} r^2_{n-i}V^k_i$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned}V^k_i&=e^{2\mu(i+1;k-n+i-1)+\sigma^2(i+1;k-n+i-1)}e^{2\mu(k-n+i-1;k-n+i)}\big\{e^{\sigma^2(k-n+i-1;k-n+i)}-1\big\}\\&\quad+e^{2\mu(i+1;k-n+i-1)}\big\{e^{\sigma^2(i+1;k-n+i-1)}-1\big\}\big\{e^{\mu(k-n+i-1;k-n+i)}-1\big\}^2.\end{aligned}$$

$\alpha \in (0,100)$ に対し，C_α^r を

$$\frac{1}{(C_\alpha^r)^2}\sum_{i=0}^{2n-k} r_{n-i}^2 V_i^k \leqq \frac{\alpha}{100}$$

を満すように選ぶ．このとき次が成り立つ．

$$P^{(r)}\big(T_k \notin (t_k(r) - C_\alpha^r, t_k(r) + C_\alpha^r)\big) \leqq \frac{\alpha}{100}.$$

よって

命題 2.2 区間

$$(t_k(r) - C_\alpha^r, t_k(r) + C_\alpha^r)$$

は，信頼度 $(100-\alpha)\%$ 以上の T_k の両側信頼区間である．

注意 2.3 自乗可積分な確率変数 X に対し，$E[(X-a)^2]$，$a \in \mathbb{R}$，は $a = E[X]$ のときに最小となる．すなわち，X の分散は $E[(X-a)^2]$，$a \in \mathbb{R}$，の最小値である．この意味において，命題 2.2 の両側信頼区間は，確率 $P(|X-a| \geqq C)$ をチェビショフの不等式を用いて $E[(X-a)^2]$ により評価する場合に得られる最良の区間である．

A　ノンランダムな連続関数の伊藤積分

この節では，ノンランダムな連続関数の伊藤積分について簡単に振り返る．一般の伊藤積分については [3] を参照せよ．

$\{\beta_t\}_{t \geqq 0}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された 1 次元ブラウン運動とする．$\sigma : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．$s < t$ に対し，$T_{k,i}^{s,t} = s + i(t-s)2^{-k}$ とし，

$$I_k(s;t) = \sum_{i=0}^{2^k-1} \sigma(T_{k,i}^{s,t})\Big\{\beta_{T_{k,i+1}^{s,t}} - \beta_{T_{k,i}^{s,t}}\Big\}$$

と定義する．$m > k$ ならば，

$$I_k(s;t) - I_m(s;t) = \sum_{i=0}^{2^k-1}\sum_{j=0}^{2^{m-k}-1} \big\{\sigma(T_{k,i}^{s,t}) - \sigma(T_{m,2^{m-k}i+j}^{s,t})\big\}\Big\{\beta_{T_{m,2^{m-k}i+j+1}^{s,t}} - \beta_{T_{m,2^{m-k}i+j}^{s,t}}\Big\}$$

となる．ブラウン運動の独立増分性と $\beta_u - \beta_v$ は平均 0，分散 $u - v$ の正規分布に従うことより，次が成り立つ．

$$E\Big[\Big\{\beta_{T_{m,2^{m-k}i+j+1}^{s,t}} - \beta_{T_{m,2^{m-k}i+j}^{s,t}}\Big\}\Big\{\beta_{T_{m,2^{m-k}p+q+1}^{s,t}} - \beta_{T_{m,2^{m-k}p+q}^{s,t}}\Big\}\Big] = \delta_{ip}\delta_{jq}2^{-m}(t-s).$$

これを上の等式に代入すれば

$$\begin{aligned} E[(I_k(s;t) - I_m(s;t))^2] &= \sum_{i=0}^{2^k-1}\sum_{j=0}^{2^{m-k}-1} \big\{\sigma(T_{k,i}^{s,t}) - \sigma(T_{m,2^{m-k}i+j}^{s,t})\big\}^2 2^{-m}(t-s) \\ &\leqq \Big[\max_{0\leqq i\leqq k, 0\leqq j\leqq 2^{m-k}} \{\sigma(T_{k,i}^{s,t}) - \sigma(T_{m,2^{m-k}i+j}^{s,t})\}^2\Big](t-s) \longrightarrow 0 \quad (k,m \to \infty). \end{aligned}$$

よって $I_k(s;t)$ は L^2-極限をもつ．この極限を

$$\int_s^t \sigma(u)d\beta_u$$

と表し，$\sigma(u)$ の $[s,t]$ 上の伊藤積分という;

$$\lim_{k\to\infty} E\left[\left(I_k(s;t) - \int_s^t \sigma(u)d\beta_u\right)^2\right] = 0. \tag{7}$$

ノンランダムな関数の確率積分はノバート・ウィーナー (Nobert Wiener) により初めて研究されたので，彼に因み上のような伊藤積分をウィーナー積分と呼ぶこともある．

B　数学的考察

まず S_t^i の具体的な表現を与える．既に述べたように，経年を表すパラメータ t は自然数 $\mathbb{N}$ を変動するものとする．

命題 B.1 S_t^i は次をみたす．

$$S_t^i = S_s^i \exp\left(\nu(s;t) + \int_s^t \sigma(u)dB_u^i\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

証明 $0 < s$ とする．

$$X_t = \int_s^t \nu(u)du + \int_s^t \sigma(u)dB_u^i$$

とおく．ただし

$$\nu(u) = \mu(u) - \frac{1}{2}\sigma(u)^2.$$

伊藤の公式 ([3]) を，$f(x) = e^x$ として $f(X_t)$，$t \geqq s$，に適用すれば，$Y_t = f(X_t)$ は次の確率微分方程式に従うといえる．

$$\begin{aligned} dY_t &= f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)dX_t \cdot dX_t \\ &= Y_t\{\nu(t)dt + \sigma(t)dB_t^i\} + \frac{1}{2}Y_t\sigma(t)^2 dt \\ &= \mu(t)Y_t dt + \sigma(t)Y_t dB_t^i. \end{aligned}$$

解の一意性 ([3]) より，

$$S_t^i = S_s^i Y_t = S_s^i \exp\left(\int_s^t \nu(u)du + \int_s^t \sigma(u)dB_u^i\right)$$

となる．これより望む S_t^i の表示を得る． ∎

つぎに $P^{(r)}$ の下での S_t^i について調べる．

命題 B.2 $P^{(r)}$ の下，以下が成り立つ．
(i) $i \leqq n$ と $s \geqq i+1$ に対し，$\{S_t^{n-i}/S_s^{n-i}\}_{t>s}$ と $\{S_v^{n-i}\}_{i+1\leqq v\leqq s}$ は独立である．さらに次が成り立つ．$S_t^{n-i}/S_s^{n-i} \sim LN(\nu(s;t), \sigma^2(s;t))$.
(ii) $\{S_t^2\}_{t\geqq n}, \{S_t^3\}_{t\geqq n-1}, \ldots, \{S_t^n\}_{t\geqq 2}$ は独立である．

この命題の証明は幾つかの補題に分けて証明する．

補題 B.3 $s<t$ とする．確率 P の下，$S_t^i/S_s^i \sim LN(\nu(s;t),\sigma^2(s;t))$.

証明 A 節と同じ記号を用いる．前節での考察により，

$$I_k^i(s;t)=\sum_{j=0}^{2^k-1}\sigma(T_{k,j}^{s,t})\Big\{B^i_{T^{s,t}_{k,j+1}}-B^i_{T^{s,t}_{k,j}}\Big\}$$

とおけば，

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}E\left[\left(I_k^i(s;t)-\int_s^t\sigma(u)dB_u^i\right)^2\right]=0,\\
&E[I_k^i(s;t)]=0,\\
&E[(I_k^i(s;t))^2]=\sum_{j=0}^{2^k-1}\sigma(T_{k,j})^2 2^{-k}(t-s)\to\sigma^2(s;t)
\end{aligned}$$

となる．各 $I_k^i(s;t)$ は正規分布に従うので，これらより

$$\begin{aligned}
E\left[\exp\left(\sqrt{-1}\lambda\int_s^t\sigma(u)dB_u^i\right)\right]&=\lim_{k\to\infty}E[\exp(\sqrt{-1}\lambda I_k^i(s;t)]\\
=\lim_{k\to\infty}\exp\left(-\frac{E[(I_k^i(s;t))^2]\lambda^2}{2}\right)&=\exp\left(-\frac{\sigma^2(s;t)\lambda^2}{2}\right),\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

したがって

$$\int_s^t\sigma(u)dB_u^i$$

は，平均 0 分散 $\sigma^2(s;t)$ の正規分布に従う．(2) と合せ，これから望む主張を得る． ∎

補題 B.4 $s>0$ とする．P の下，$\{S_t^i/S_s^i\}_{t>s}$ と $\{S_v^i\}_{v\leqq s}$ は独立である．

証明 補題B.3の証明と同じ記号を用いる．ブラウン運動の独立増分性より，確率過程 $\{I_k^i(0;v)\}_{v\leqq s}$ と $\{I_k^i(s;t)\}_{t>s}$ は独立である．(7) より，これは $\left\{\int_0^v\sigma(u)dB_u^i\right\}_{v\leqq s}$ と $\left\{\int_s^t\sigma(u)dB_u^i\right\}_{t>s}$ が独立であることを導く．この独立性を表示 (8) と合わせれば，$\{S_t^i/S_s^i\}_{t>s}$ と $\{S_v^i\}_{v\leqq s}$ は独立であるといえる． ∎

補題 B.5 P の下，$\{S_t^1\}_{t\geqq0},\{S_t^2\}_{t\geqq0},\ldots,\{S_t^n\}_{t\geqq0}$ は独立である．

証明 補題B.3の証明と同じ記号を用いる．n 次元ブラウン運動の各成分の独立性より，

$$\{I_k^1(0;t)\}_{t\geqq0},\{I_k^2(0;t)\}_{t\geqq0},\ldots,\{I_k^n(0;t)\}_{t\geqq0}$$

は独立となる．$k\to\infty$ とすれば，望む独立性を得る． ∎

証明 (命題 B.2 の証明)
(i) $i+1 \leqq v_1 \leqq \cdots \leqq v_m \leqq s < t_1 < \cdots < t_k$ とする．$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$ に対し

$$A = \{S^{n-i}_{t_p}/S^{n-i}_s \leqq b_p, 1 \leqq p \leqq k\}, \quad B = \{S^{n-i}_{v_q} \leqq a_q, 1 \leqq q \leqq m\}$$

とおく．補題 B.4，B.5 により，

$$\begin{aligned} P^{(r)}(A \cap B) &= P(A \cap B | S^{n-i}_{i+1} = r_{n-i}) = P(A)P(B|S^{n-i}_{i+1} = r_{n-i}) \\ &= P(A|S^{n-i}_{i+1} = r_{n-i})P(B|S^{n-i}_{i+1} = r_{n-i}) = P^{(r)}(A)P^{(r)}(B). \end{aligned}$$

これより，望む独立性を得る．さらに補題 B.3 により，望む結論を得る．
(ii) 主張は補題 B.4，B.5 から (i) の証明と同様にして得られる．詳細は略す． ∎

対数正規分布に関する主張を用意する．

命題 B.6 確率変数 X, Y は独立で，$X \sim LN(m, v)$，$Y \sim LN(\ell, u)$ とする．
(i) $f_{m,v;\ell,u}$ は，確率変数 $Y(X-1)$ の分布密度関数である．
(ii) $Y(X-1)$ の分散 $V(Y(X-1))$ は次で与えられる．

$$V(Y(X-1)) = e^{2\ell+2u}e^{2m+v}(e^v - 1) + e^{2\ell+u}(e^u - 1)(e^{m+(v/2)} - 1)^2.$$

証明 (i) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を有界な連続関数とする．X と Y の独立性より，次が成り立つ．

$$E[g(Y(X-1))] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(y(x-1))f_{m,v}(x)f_{\ell,u}(y)dxdy.$$

変数変換 $z = y(x-1)$，$w = y$ のヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} 1/w & -z/w^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．よって

$$E[g(Y(X-1))] = \int_{-\infty}^{\infty} g(z)f_{m,v;\ell,u}(z)dz.$$

これより主張を得る．
(ii) $E[X] = e^{m+(v/2)}$，$E[X^2] = e^{2m+2v}$ であるから，X と Y の独立性より，

$$\begin{aligned} V(Y(X-1)) &= E[Y^2]E[(X-1)^2] - \{E[Y]E[X-1]\}^2 \\ &= e^{2\ell+2u}(e^{2m+2v} - 2e^{m+(v/2)} + 1) - e^{2\ell+u}(e^{m+(v/2)} - 1)^2 \\ &= e^{2\ell+2u}e^{2m+v}(e^v - 1) + e^{2\ell+u}(e^u - 1)(e^{m+(v/2)} - 1)^2. \end{aligned}$$

∎

参考文献

[1] Heyer, D.: Random walk model for paid development, in: *CAS Forum 2001 Fall*, (2001), 239–254 (`http://www.casact.org/pubs/forum/01fforum/01ff239.pdf`).

[2] Hirotsu, T. and Taniguchi, S.: The random walk model revisited, MI-Preprint Series 2008-7, 2008.

[3] Øksendal, B.: *Stochastic differential equations, An introduction with applications*, 6th ed., Springer, 2003. (第 5 版邦訳) 谷口説男: 確率微分方程式，シュプリンガー・フェラーク東京，1999.

実データを使用したRandomWalk法の活用例

吉 満 隆 亮
日新火災海上保険

本編では，RandomWalk 法を用いて，実データにより将来の支払保険金の区間推定を行う．将来の支払保険金を区間推定する方法はさまざまあるが，簡便な手法で将来キャッシュフローを区間推定できるという点では，RandomWalk 法は，極めて有効な手法であると考えられる．

1 RandomWalk モデル

RandomWalk モデルでは，累積の支払保険金をパラメータ $t \in (0, \infty]$ の確率過程 P_t とみなし，P_t が幾何ブラウン運動

$$dP_t = \mu(t)P_t dt + \sigma(t)P_t dB_t \tag{9}$$

に従うものと仮定する．ただし，B_t はブラウン運動，$\mu(t)$ は累積の支払保険金の瞬間増加率，$\sigma(t)$ はボラティィリティである．(9) の解は

$$\frac{P_{t_2}}{P_{t_1}} \sim LN\left(\int_{t_1}^{t_2}\left(\mu(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right)dt, \sqrt{\int_{t_1}^{t_2}\sigma^2(t)dt}\right)$$

で与えられ，よって RandomWalk 法は，LDF が対数正規分布に従うときに用いることができる．さらに，各経過年度の LDF が独立であると仮定すると，任意の $[t, T]$ で

$$\log\left(\frac{P_T}{P_t}\right) = \log\left(\prod_{j=t}^{T-1}\frac{P_{j+1}}{P_j}\right) = \sum_{j=t}^{T-1}\log\left(\frac{P_{j+1}}{P_j}\right)$$

となり，正規分布の再生性から

$$\log\left(\frac{P_T}{P_t}\right) \sim N\left(\sum_{j=t}^{T-1}\mu_j, \sum_{j=t}^{T-1}\sigma_j^2\right)$$

となる．ただし，$\mu_j = \displaystyle\int_j^{j+1}\left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds$，$\sigma_j^2 = \displaystyle\int_j^{j+1}\sigma^2(s)ds$ とする．よって，例えば，90 %信頼区間は

$$\left(P_t \times \exp\left(\sum_{j=t}^{T-1}\mu_j - 1.645\sqrt{\sum_{j=t}^{T-1}\sigma_j^2}\right), P_t \times \exp\left(\sum_{j=t}^{T-1}\mu_j + 1.645\sqrt{\sum_{j=t}^{T-1}\sigma_j^2}\right)\right)$$

で与えられる．

2　実データを使用したRandomWalk法の活用例

RandomWalk法を実際のデータ（ただし仮データ）に当てはめることを試みる．ただし，実用化という観点から，数学的な厳密さは要求せず，途中の計算はMicrosoft社のExcelを用いて行っている．ここでは，2008年度末時点の累積保険金(百万円単位)を使用する．

	経過年度							
契約年度	1	2	3	4	5	6	7	8
2001	182	622	646	739	784	788	789	796
2002	181	548	605	715	718	722	723	
2003	265	761	981	1,038	1,042	1,150		
2004	333	1,011	1,076	1,170	1,313			
2005	288	873	1,106	1,227				
2006	278	844	1,299					
2007	404	1,214						
2008	374							

$\mu(t)$,$\sigma^2(t)$ を推定するために，LDFの対数を計算する．

	経過年度						
契約年度	1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8
2001	1.227	0.037	0.134	0.060	0.004	0.001	0.010
2002	1.109	0.099	0.167	0.004	0.005	0.002	
2003	1.057	0.254	0.057	0.003	0.099		
2004	1.109	0.063	0.084	0.116			
2005	1.109	0.237	0.104				
2006	1.112	0.431					
2007	1.100						
標本平均	1.117	0.187	0.109	0.046	0.036	0.002	0.010
標本分散	0.003	0.022	0.002	0.003	0.003	0.000	0.000

Heyer[1]に従い，$\mu(t), \sigma(t)$ の関数形は

$$\text{(I)}\alpha\exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\gamma}\right],\quad \text{(II)}\alpha\left[1+\gamma\left(\frac{t}{\beta}\right)\right]^{-1/\gamma},\quad \text{(III)}\alpha t^{-\beta}+\gamma,\quad \text{(IV)}\alpha\frac{\beta\gamma^{\beta}}{t^{\beta+1}}$$

のいずれかであると仮定し，最小二乗法を用いてパラメータ α, β, γ を推定する．今回のデータでは，次の結果を得る．

	関数形	α	β	γ
$\mu(t)$	(II)	99742.46526	0.010444194	0.335140073
$\sigma^2(t)$	(IV)	8.729029926	0.001795941	529.8058071

	1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8	二乗誤差
平均	1.11463	0.21325	0.07490	0.03437	0.01836	0.01081	0.00680	0.002432
分散	0.01033	0.00604	0.00428	0.00332	0.00271	0.00229	0.00198	0.342408

最小二乗法をExcelのソルバーを用いて実行しているが，簡潔に説明すると次のようなループをさせるMacroを作成している．α,β,γ に適当に初期値を与え，μ_j，σ_j^2 と標本平均 μ と標本分散 σ^2 との距離

$$d^2 = \sum_j \left\{ (\mu_j - \mu)^2 + (\sigma_j^2 - \sigma^2)^2 \right\}$$

を計算する (より厳密には，μ_j が σ_j^2 に依存するため，σ_j^2 を計算した後に μ_j を決定している)．さらに違う初期値 α',β',γ' を与えたときの距離 d_1^2 が d^2 よりも小さければ，そのときの初期値 α',β',γ' を選ぶ．このようなことを繰り返し，d^2 が最小に収束するような α,β,γ を決定する．ここで μ_j,σ_j^2,α,β,γ を同時に求めていることに留意する．関数形のすべての組み合わせ (16 通り) の中から，二乗誤差の最も小さいものの組み合わせを選ぶ．信頼区間を90%とすると次のようになる．

	1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8
μ_j	1.11463	0.21325	0.07490	0.03437	0.01836	0.01081	0.00680
σ_j^2	0.01033	0.00604	0.00428	0.00332	0.00271	0.00229	0.00198
標準偏差	0.10165	0.07771	0.06543	0.05762	0.05207	0.04787	0.04455
上限	1.24491	0.31284	0.15876	0.10821	0.08509	0.07216	0.06389
下限	0.98436	0.11367	-0.00896	-0.03946	-0.04837	-0.05054	-0.05029

結果として，次のような信頼区間90%の将来キャッシュフローを得ることができる．

○累積支払保険金の上限

	経過年度							
契約年度	1	2	3	4	5	6	7	8
2001	182	622	646	739	784	788	789	796
2002	181	548	605	715	718	722	723	771
2003	265	761	981	1,038	1,042	1,150	1,236	1,273
2004	333	1,011	1,076	1,170	1,313	1,430	1,480	1,515
2005	288	873	1,106	1,227	1,367	1,428	1,469	1,499
2006	278	844	1,299	1,522	1,620	1,681	1,722	1,753
2007	404	1,214	1,660	1,844	1,946	2,011	2,055	2,088
2008	374	1,300	1,664	1,830	1,921	1,978	2,017	2,046

○累積支払保険金の期待値

	経過年度							
契約年度	1	2	3	4	5	6	7	8
2001	182	622	646	739	784	788	789	796
2002	181	548	605	715	718	722	723	728
2003	265	761	981	1,038	1,042	1,150	1,163	1,171
2004	333	1,011	1,076	1,170	1,313	1,338	1,352	1,361
2005	288	873	1,106	1,227	1,269	1,293	1,307	1,316
2006	278	844	1,299	1,400	1,449	1,475	1,492	1,502
2007	404	1,214	1,502	1,619	1,676	1,707	1,725	1,737
2008	374	1,141	1,412	1,522	1,575	1,604	1,622	1,633

○累積支払保険金の下限

	経過年度							
契約年度	1	2	3	4	5	6	7	8
2001	182	622	646	739	784	788	789	796
2002	181	548	605	715	718	722	723	688
2003	265	761	981	1,038	1,042	1,150	1,094	1,077
2004	333	1,011	1,076	1,170	1,313	1,251	1,235	1,223
2005	288	873	1,106	1,227	1,179	1,171	1,163	1,155
2006	278	844	1,299	1,287	1,296	1,295	1,292	1,286
2007	404	1,214	1,360	1,422	1,443	1,449	1,448	1,445
2008	374	1,002	1,199	1,266	1,292	1,301	1,304	1,303

3 RandomWalk 法の長所と短所

RandomWalk 法の長所は，将来キャッシュフローの区間推定を Excel を用いて簡単に計算できることである．一方で，LDF が対数正規分布に従うという前提は一部の保険種目には当てはまらず，また Excel の計算機能の限界もあり，これらの点は今後改良する余地が残る．

参考文献

[1] Daniel D.Heyer, A RandomWalk Model for Paid Loss Development

マークドポアソン過程
– 保険金見積もりの細分化について –

谷 口 説 男
九州大学大学院数理学研究院

はじめに

保険契約のポートフォリオ全体のクレーム総額の分布を集合的リスクモデルで扱う手法として，クレーム総額を複合ポアソン分布によりモデル化する方法がある．このモデルでは，クレーム総額を複合ポアソン過程を用いてモデル化する．複合ポアソン過程の構造から，モデルに取り込まれるのは各クレームに対する支払金額と総クレーム回数だけである．すなわち，i 番目のクレーム支払金額を Y_i とし，総クレーム回数を N とするとき，このモデルで取り扱われるのは次式で与えられる支払総額 S である;

$$S = \sum_{i=1}^{N} Y_i.$$

ただし，次の様な構造が仮定されている．

(1) N はパラメータ W のポアソン分布に従う ($N \sim \mathbf{Po}(W)$ とあらわす)．すなわち
$$P(N = n) = \frac{W^n}{n!}e^{-W}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

(2) $Y_1, Y_2, \ldots$ は独立で，すべて確率変数 Y と同じ分布に従い，さらに N と独立である．

確率変数 Y の分布を P_Y と表し，上の確率変数 S はパラメータ (W, P_Y) の複合ポアソン分布に従うという ($\boldsymbol{S \sim \mathbf{Po}(W, P_Y)}$ と記す)．ただし，分布 P_Y とは，$\mathbb{R}$ 上の次で特徴付けられる確率測度のことをいう．

$$P_Y((-\infty, a]) = P(Y \leqq a), \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

上の複合ポアソン分布では，クレームにさらに事故発生時刻，事故発生から保険金支払いが始まるまでの待ち時間，支払完了までの経過状況などの情報を取り込むことはできない．この様な要請に応えるものとしてマークドポアソン過程がある．本報告では，R. Norberg の論文 “Prediction of outstanding liabilities in non-life insurance” (Astin Bull., 23 (1993), 95–115) に従って，マークドポアソン過程について紹介する．

1　マークドポアソン過程

1.1　クレーム

クレームは，以下の統計量から成ると考えよう．

事故発生時刻 : T
発生後報告されるまでの経過時間 : U
報告後支払い完了までの経過時間 : V
$T+U+v$ までの累計支払保険金 : $Y(v)\ (0 \leqq v' \leqq V)$
総支払保険金 : $Y = Y(V)$

クレームの構成要因は下図のような関係にある.

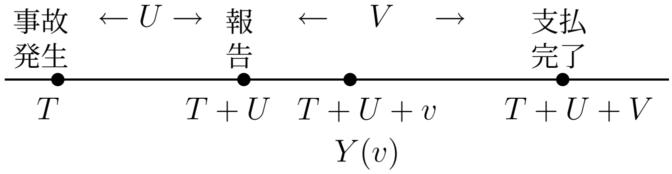

図 4: クレームを構成する統計量

クレームの構成要因のうち事故発生時間意外の要因からなる組

$$Z = (U, V, Y, \{Y(v')\}_{0 \leqq v' \leqq V})$$

をマーキングという．マーキングは支払情報 (the development of claim) を記述しており，クレームは，事故発生時刻とマーキングの組

$$(T, Z)$$

で与えられる．後で利用するために，マーキングの全体 $\mathcal{Z}$ とクレームの全体 $\mathcal{C}$ を次のように定義しておく.

$$\mathcal{Z} = \left\{ Z = (U, V, Y, \{Y(v)\}_{0 \leqq v \leqq V}) \,\middle|\, U, V, Y \geqq 0, 0 \leqq Y(v) \leqq Y(v')\,(v \leqq v') \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ (T, Z) \,\middle|\, T > 0, Z \in \mathcal{Z} \right\} = (0, \infty) \times \mathcal{Z}.$$

1.2 マークドポアソン過程 – 定義

複合ポアソン過程 $S = \sum_{\iota=1}^{N} Y_\iota$ は，列 $\{Y_\iota\}_{1 \leqq \iota \leqq N}$ により定まる．Y_ι は ι 番目のクレーム支払金額であるから，それは自然に発生時刻 T_ι を含んでいる．すなわち，複合ポアソン過程は，発生時刻とクレーム支払金額の組の列

$$\{(T_\iota, Y_\iota\}_{1 \leqq \iota \leqq N}$$

から定まる．この支払金額 Y_ι をマーキング Z_ι に変えた組の列

$$\{(T_\iota, Z_\iota)\}_{1 \leqq \iota \leqq N}$$

が**マークドポアソン過程**である.

マークドポアソン過程の詳しい構造を見ていこう．時刻 t までの事故発生回数を $N(t)$ と表せば，事故発生時刻の列 $T_1 < T_2 < \ldots$ と総事故発生回数 N は

$$T_\iota = \inf\{t \,|\, N(t) \geqq \iota\}, \quad N = \lim_{t \to \infty} N(t)$$

という関係式により定まる (下図参照).

マークドポアソン過程では

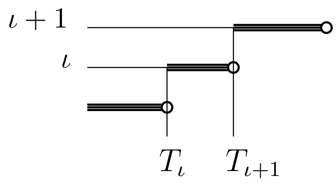

図 5: 事故発生時刻と発生回数

$\{N(t)\}_{t\geqq 0}$ は強度関数 $w(t)$ をもつ非斉次ポアソン過程である

と仮定する．ただし，強度関数 $w(t)$ をもつ非斉次ポアソン過程とは，次のように定義される確率過程である．確率過程 $\{N(t)\}_{t\geqq 0}$ が，3 条件

(1) $P(N(t) \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}) = 1$,

(2) $s \leqq t$ ならば，$P(N(s) \leqq N(t)) = 1$,

(3) $P(\lim_{h\searrow 0} N(t+h) = N(t),\ \forall t \geqq 0) = 1$

を満すとき，**計数過程**であるという．ここで $\mathbb{Z}_{\geqq 0} = \{0, 1, 2, \ldots\}$．$\int_0^\infty w(u)du < \infty$ を満す関数 $w : [0,\infty) \to [0,\infty)$ を採る．計数過程 $\{N(t)\}_{t\geqq 0}$ が強度関数 $w(t)$ をもつ**非斉次ポアソン過程**であるとは，2 条件

(1) 独立な増分を持つ．すなわち，任意の $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対し，$N(t_j) - N(t_{j-1})$, $1 \leqq j \leqq n$, は独立である，

(2) $N(t) - N(s) \sim \mathbf{Po}\left(\int_s^t w(u)du\right)$, $0 \leqq s < t$

が成り立つことをいう ($\boldsymbol{\{N(t)\}_{t\geqq 0} \sim \mathbf{Po}(w(t); t \geqq 0)}$ と記す)．計数過程，非斉次ポアソン過程については，後節「共同研究中間発表会における参考資料– 確率論・線形計画法・ガウス推定 –」**A.4**(58 頁) を参照せよ．

マークドポアソン過程 $\{(T_\iota, Z_\iota)\}_{1\leqq\iota\leqq N}$ のマーキング Z_ι には次のような仮定をおく．

$t \geqq 0$ 毎に $\mathcal{Z}$ に値をとる確率変数 $Z(t)$ が存在し，

$$Z_\iota = Z(T_\iota)$$

が成立し，さらに $Z(t)$，$t \geqq 0$，は互いに独立である．

これは丁度，複合ポアソン分布において，Y_i を (T_i, Y_i) という組と見做したことおよび $Y_1, Y_2, \ldots$ が互いに独立であると仮定したことと呼応している．

以上をまとめると，マークドポアソン過程は次のように定義される．

定義 1.1 (マークドポアソン過程) $w : [0,\infty) \to [0,\infty)$ は

$$W = \int_0^\infty w(u)du < \infty$$

をみたすと仮定する．$\{N(t)\}_{t\geqq 0} \sim \mathbf{Po}(w(t); t \geqq 0)$ とする．$\{Z(t); t \geqq 0\}$ を，$\{N(t)\}_{t\geqq 0}$ と独立で，さらに互いに独立な $\mathcal{Z}$-値確率変数 $Z(t)$ の族とする．$P_{Z|t}$ を $Z(t)$ の分布とする，すなわち，$P_{Z|t} = P_{Z(t)}$ とおく．

$$N = \lim_{t\to\infty} N(t), \quad T_\iota = \inf\{t \geqq 0 \,|\, N(t) \geqq \iota\}, \quad Z_\iota = Z(T_\iota)$$

と定める．このとき

$$\{(T_\iota, Z_\iota)\}_{1\leqq\iota\leqq N}$$

を**生起率** (intensity)$\{w(t)\}$，**位置依存マーキング** (position-dependent marking)$\{P_{Z|t}\}$ の**マークドポアソン過程** (marked Poisson process) という．これを

$$\boldsymbol{\{(T_\iota, Z_\iota)\}_{1\leqq\iota\leqq N} \sim \mathbf{Po}(w(t), P_{Z|t}; t \geqq 0)}$$

と記す.

注意 1.2 $N \sim \mathbf{Po}(W)$ である．実際,

$$E[e^{\zeta N}] = \lim_{t\to\infty} E[e^{\zeta N(t)}] = \lim_{t\to\infty} \exp\left[\left(\int_0^t w(u)du\right)(e^{\zeta \int_0^t w(u)du} - 1)\right] = \exp[W(e^{\zeta W} - 1)].$$

1.3　マークドポアソン過程 – 分布

定理 1.3 $\{(T_\iota, Z_\iota)\}_{1\leqq\iota\leqq N} \sim \mathbf{Po}(w(t), P_{Z|t}; t \geqq 0)$ とする．

$$P_{T,Z}(dt, dz) = \frac{w(t)}{W} dt P_{Z|t}(dz)$$

とおく．このとき

$$P(N = n,\, (T_i, Z_i) \in (dt_i, dz_i),\, i = 1, \ldots, n) = \frac{W^n}{n!} e^{-W}\, n! \prod_{i=1}^n P_{T,Z}(dt_i, dz_i). \tag{10}$$

とくに，マークドポアソン過程はつぎの 2 段階で構成できる．
(i) $N \sim \mathbf{Po}(W)$ を構成する．
(ii) N 個の $P_{T,Z}$ に従う確率変数 $(T_1', Z_1'), \ldots, (T_N', Z_N')$ を構成し，T_i' の小さい順に並べ直す.

定理の最後に述べられた構成方法の (ii) における並べ替えの場合の数 $n!$ が (10) に現れている．

証明 $\{N(t)\} \sim \mathbf{Po}(w(t); t \geqq 0)$ であるから，$\{T_i - T_{i-1}\}_{i=1,2,\ldots}$ は独立である．ただし，$T_0 = 0$ とした．さらに

$$\begin{aligned}
&P(T_i - T_{i-1} > t \,|\, T_{i-1} = s) \\
&\quad = P(N(t+s) - N(s) = 0 \,|\, T_{i-1} = s) \\
&\quad = P(N(t+s) - N(s) = 0) \qquad (\because \text{独立増分性}) \\
&\quad = \exp\left(-\int_s^{s+t} w(u)du\right) \qquad \left(\because N(t+s) - N(s) \sim \mathbf{Po}\left(\int_s^{s+t} w(u)du\right)\right).
\end{aligned}$$

両辺を微分すれば

$$P(T_i - T_{i-1} \in dt \,|\, T_{i-1} = s) = w(s+t) e^{-\int_s^{s+t} w(u)du}\, dt$$

となる．$T_i - T_{i-1}$，$i = 1, 2, \ldots$，の独立性に注意すれば，これより

$$P((T_1, \ldots, T_n) \in dt_1 \cdots dt_n) = \left(\prod_{i=1}^n e^{-\int_{t_{i-1}}^{t_i} w(u)du} w(t_i)\right) dt_1 \cdots dt_n. \tag{11}$$

つぎに最後のクレームが時刻 t_n に起きそれ以後クレームが発生しない事象を考えればつぎを得る.

$$\begin{aligned}&P(N=n\,|\,T_1=t_1,\dots,T_n=t_n)\\&\qquad=\lim_{t\to\infty}P(N(t)-N(t_n)=0)=\lim_{t\to\infty}e^{-\int_{t_n}^{t}w(u)du}=e^{-\int_{t_n}^{\infty}w(u)du}.\end{aligned}\tag{12}$$

関数 $h:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned}&E[h((T_1,Z_1),\dots,(T_n,Z_n));N=n]\\&=\int_{\mathbb{R}^n}E\big[h((T_1,Z_1),\dots,(T_n,Z_n))\mathbf{1}_{\{N=n\}}\,\big|\,T_1=t_1,\dots,T_n=t_n\big]P((T_1,\dots,T_n)\in dt_1\cdots dt_n)\end{aligned}$$

が成り立つ．(11)，(12) に注意すれば，

$$\begin{aligned}&P(N=n,\,(T_i,Z_i)\in(dt_i,dz_i),\,i=1,\dots,n)\\&=\left(\prod_{i=1}^{n}e^{-\int_{t_{i-1}}^{t_i}w(u)du}\,w(t_i)\right)dt_1\cdots dt_n e^{-\int_{t_n}^{\infty}w(u)du}\prod_{i=1}^{n}P_{Z|t_i}(dz_i)\\&=e^{-\int_0^{\infty}w(u)du}\prod_{i=1}^{n}\{w(t_i)dt_i\,P_{Z|t_i}(dz_i)\}=\frac{W^n}{n!}e^{-W}\,n!\prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{w(t_i)}{W}\,dt_i\,P_{Z|t_i}(dz_i)\right\}\end{aligned}$$

となり，主張を得る. ∎

マークドポアソン過程 $\{(T_\iota,Z_\iota)\}_{1\leqq\iota\leqq N}$ の第 2 成分，すなわち ι 番目のマーキング

$$Z_\iota=(U_\iota,V_\iota,Y_\iota,\{Y_\iota(v')\}_{0\leqq v'\leqq V_\iota})$$

に対し，

$$X=\sum_{\iota}^{N}Y_\iota$$

とおけば，これは最終的な総支払保険金を表すことになる．右辺は Y_ι の順によらないことに注意すれば，定理 1.3 により，Y_ι の従う分布 P_Y はつぎで与えられるとしてよい.

$$P_Y(dy)=\frac{1}{W}\int_{(0,\infty)}w(t)P_{Y|t}(dy)dt.\tag{13}$$

ただし $Z(t)=(U(t),V(t),Y(t),\{Y(t;v')\}_{0\leqq v'\leqq V(t)})$ と表したときの $Y(t)$ の分布を $P_{Y|t}$ と表している．とくにつぎがいえる.

系 1.4 次式が成り立つ.

$$E[e^{\zeta X}]=\exp\left(\left[\int_{(0,\infty)}dt\int_{[0,\infty)}P_{Y|t}(dy)w(t)e^{\zeta y}\right]-W\right).$$

証明 $X\sim\mathbf{Po}(W,P_Y)$ であるから，

$$E[e^{\zeta X}]=\exp\big(W\{E[e^{\zeta Y}]-1\}\big).$$

これに上の等式 (13) を代入すればよい. ∎

この系から，容易に X の高次モーメントが求められる．たとえば

$$E[X]=\frac{d}{d\zeta}\bigg|_{\zeta=0}E[e^{\zeta X}]=\int_{(0,\infty)}dt\int_{[0,\infty)}P_{Y|t}(dy)w(t)y$$

となる.

2　マークドポアソン過程の分解

2.1　マーキングの分類

現在時刻 τ を用いて，クレーム $(t,z)\in\mathcal{C}$ のマーキング $z=(u,v,y,\{y(v')\}_{v'\leqq v})\in\mathcal{Z}$ を支払状況に応じて以下のように 4 種類に分類する．

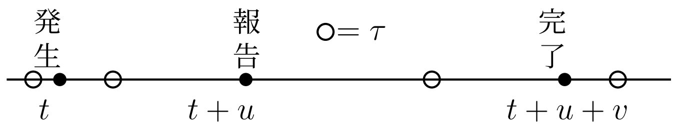

図 6: マーキングの分類

$$
\begin{aligned}
\text{支払が完了したクレーム:}\quad & \mathcal{Z}_t^{\mathrm{s}}=\{z\,|\,t+u+v\leqq\tau\}\\
\text{報告済だが支払未了のクレーム:}\quad & \mathcal{Z}_t^{\mathrm{rns}}=\{z\,|\,t+u\leqq\tau<t+u+v\}\\
\text{事故は既発生だが未報告のクレーム:}\quad & \mathcal{Z}_t^{\mathrm{inr}}=\{z,|\,t\leqq\tau<t+u\},\\
\text{事故が未発生のクレーム:}\quad & \mathcal{Z}_t^{\mathrm{cni}}=\{z\,|\,\tau<t\}
\end{aligned}
$$

添え字 s，rns，inr，cni はそれぞれ

s=settled,
rns=reported not settled,
inr=incurred not reported,
cni=covered not incurred

の略である．つぎが成り立つ．

$$
\mathcal{Z}=\mathcal{Z}_t^{\mathrm{s}}\cup\mathcal{Z}_t^{\mathrm{rns}}\cup\mathcal{Z}_t^{\mathrm{inr}}\cup\mathcal{Z}_t^{\mathrm{cni}},\quad \mathcal{Z}_t^{g}\cap\mathcal{Z}_t^{\mathrm{g}'}=\emptyset\quad(g\neq g').
$$

$g=$s，rns，inr，cni に対し，$z\in\mathcal{Z}_t^g$ となるクレーム (t,z) を ***g*-クレーム**とよぶ．

2.2　マークドポアソン過程の分解

マークドポアソン過程 $\{(T_\iota,Z_\iota)\}_{1\leqq\iota\leqq N}\in\mathbf{Po}(w(t);t\geqq 0)$ に対し，マーキングの分類を用い，$Z_\iota\in\mathcal{Z}_{T_\iota}^g$ なるものを集めて，次の 4 つに分解する．

$$
\{(T_\iota^{\mathrm{s}},Z_\iota^{\mathrm{s}})\},\{(T_\iota^{\mathrm{rns}},Z_\iota^{\mathrm{rns}})\},\{(T_\iota^{\mathrm{inr}},Z_\iota^{\mathrm{inr}})\},\{(T_\iota^{\mathrm{cni}},Z_\iota^{\mathrm{cni}})\}.
$$

T_ι^g は g-クレームの ι-回目の発生時刻である．これは，T_ι と同様に，

$$
\text{時刻 } t \text{ までの } g\text{-クレームの発生回数 } N^g(t)=\sum_\iota \mathbf{1}_{\{T_\iota\leqq t,Z_\iota\in\mathcal{Z}_{T_\iota}^g\}}
$$

から，

$$
T_\iota^g=\inf\{t\,|\,N^g(t)\geqq\iota\}
$$

という関係式を通じて定まる．以下の定理で見るように，$\{N^g(t)\}_{t\geqq 0}$ は強度関数

$$w^g(t) = w(t)P_{Z|t}(\mathcal{Z}_t^g)$$

をもつ非斉次ポアソン過程となっている．さらに

$$Z_\iota^g = Z(T_\iota^g)$$

である．

定理 2.1 (i) $\{(T_\iota^g, Z_\iota^g)\}_{1\leqq\iota\leqq N^g}$，$g$ =s，rns，inr，cni は独立である．
(ii) $\{(T_\iota^g, Z_\iota^g)\}_{1\leqq\iota\leqq N^g}$ は，生起率 $\{w^g(t)\}$，位置依存マーキング $\{P_{Z|t}^g\}$ のマークドポアソン過程である;

$$\{(T_\iota^g, Z_\iota^g)\}_{1\leqq\iota\leqq N^g} \sim \mathbf{Po}(w^g(t), P_{Z|t}^g; t \geqq 0).$$

ただし，

$$P_{Z|t}^g(A) = \frac{P_{Z|t}(A)}{P_{Z|t}(\mathcal{Z}_t^g)}, \quad A \subset \mathcal{Z}_t^g.$$

証明 $\mathcal{G}$ = {s,rns,inr,cni} とおく．独立な

$$\{(T_\iota^g, Z_\iota^g)\}_{1\leqq\iota\leqq N^g} \sim \mathbf{Po}(w^g(t), P_{Z|t}^g; t \geqq 0), \quad g \in \mathcal{G}$$

をとる．すなわち，つぎを (i)∼(iii) みたす $\{N^g(t), Z^g(t)\}_{t\geqq 0}$，$g \in \mathcal{G}$，をとり，

$$T_\iota^g = \inf\{t \,|\, N^g(t) \geqq \iota\}, \quad Z_\iota^g = Z^g(T_\iota)$$

とおく．
(i) $\{N^g(t), Z^g(t)\}_{t\geqq 0}$，$g \in \mathcal{G}$，は独立である．
(ii) $\{N^g(t)\}_{t\geqq 0} \sim \mathbf{Po}(w^g(t); t \geqq 0)$.
(iii) $\{Z^g(t); t \geqq 0\}$ は $\{N^g(t)\}_{t\geqq 0}$ と独立で，さらに互いに独立であり，$P_{Z^g(t)} = P_{Z|t}^g$ をみたす．

$$N(t) = \sum_{g\in\mathcal{G}} N^g(t)$$

とおく．$\{N^g(t)\}$ の独立性とそれぞれの独立増分性より

$$\begin{aligned} E[e^{\sum_{k=1}^m \zeta_k\{N(t_k)-N(t_{k-1})\}}] &= E[e^{\sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{k=1}^m \zeta_k\{N^g(t_k)-N^g(t_{k-1})\}}] \\ &= \prod_{g\in\mathcal{G}}\prod_{k=1}^m E[e^{\zeta_k\{N^g(t_k)-N^g(t_{k-1})\}}] = \prod_{k=1}^m E[e^{\zeta_k\{N(t_k)-N(t_{k-1})\}}]. \end{aligned}$$

よって $\{N(t)\}_{t\geqq 0}$ は独立増分である．ふたたび $\{N^g(t)\}$ の独立性とポアソン分布の再生性より

$$N(t) - N(s) = \sum_{g\in\mathcal{G}}\{N^g(t) - N^g(s)\} \sim \mathbf{Po}\Big(\sum_{g\in\mathcal{G}}\int_s^t w^g(u)du\Big) = \mathbf{Po}\Big(\int_s^t w(u)du\Big).$$

したがって

$$\{N(t)\}_{t\geqq 0} \sim \mathbf{Po}(w(t); t \geqq 0).$$

$\{N(t)\}_{t \geqq 0}$ のジャンプは 1 であるから，$\{N^g(t)\}_{t \geqq 0}$ が同時にジャンプすることはない．すなわち，

$$T_\iota = \inf\{t \,|\, N(t) \geqq \iota\}$$

に対し，

$$\{T_\iota; \iota \geqq 1\} = \bigcup_{g \in \mathcal{G}} \{T_\iota^g; \iota \geqq 1\}, \quad \{T_\iota^g; \iota \geqq 1\} \cap \{T_\iota^h; \iota \geqq 1\} = \emptyset \quad (g \neq h)$$

が成り立つ．

$Z(t)$ を，$Z(T_\iota) = \sum_{g \in \mathcal{G}} Z^g(T_\iota) \mathbf{1}_{\{T_\iota \in \mathcal{Z}^g_{T_\iota}\}}$ により定める．$P^g_{Z|t}(dz)$ の定義より，

$$P_{Z|t}(dz) = \sum_{g \in \mathcal{G}} P^g_{Z|t}(dz).$$

これより

$$\begin{aligned} P(Z_\iota \in dz) = P(Z_{T_\iota} \in dz) &= \sum_{g \in \mathcal{G}} P(Z_{T_\iota} \in dz, T_\iota \in \{T_\eta^g; \eta \geqq 1\}) \\ &= \sum_{g \in \mathcal{G}} P^g_{Z|T_\iota}(dz) P_{Z|T_\iota}(\mathcal{Z}^g_{T_\iota}) = P_{Z|T_\iota}(dz). \end{aligned}$$

よって

$$\{(T_\iota, Z_\iota)\} \sim \mathbf{Po}(w(t), P_{Z|t}; t \geqq 0).$$

以上の考察により，マークドポアソン過程が定理の主張をみたす確率過程により構成されることがわかり，主張が従う． ∎

2.3 支払備金

マークドポアソン過程 $\{(T_\iota, Z_\iota)\}_{1 \leqq \iota \leqq N}$ のマーキング Z_ι を

$$Z_\iota = (U_\iota, V_\iota, Y_\iota, \{Y_\iota(v)\}_{v \leqq V_\iota})$$

と表す．g=s, rns, inr, cni に対し

$$\begin{aligned} X^g &= \sum_{\iota \leqq N^g} Y_\iota^g, \\ X^{\mathrm{prns}} &= \sum_{\iota \leqq N^{\mathrm{rns}}} Y_\iota^{\mathrm{rns}}(\tau - T_\iota^{\mathrm{rns}} - U_\iota^{\mathrm{rns}}), \\ X^{\mathrm{orns}} &= \sum_{\iota \leqq N^{\mathrm{rns}}} \{Y_\iota^{\mathrm{rns}} - Y_\iota^{\mathrm{rns}}(\tau - T_\iota^{\mathrm{rns}} - U_\iota^{\mathrm{rns}})\} \end{aligned}$$

とおく．ここで，表記が明確さを欠いているが，$Y_\iota^{\mathrm{rns}}(\tau - T_\iota^{\mathrm{rns}} - U_\iota^{\mathrm{rns}})$ は $Y_\iota^{\mathrm{rns}}(v)$ において $v = \tau - T_\iota^{\mathrm{rns}} - U_\iota^{\mathrm{rns}}$ としたときの値であり，Y_ι^{rns} と $\tau - T_\iota^{\mathrm{rns}} - U_\iota^{\mathrm{rns}}$ の積ではない．

現在時刻 τ までに

- X^{s} は支払の完了した額を，
- X^{prns} は報告済の X^{rns} のうち支払われた額を，

- X^{orns} は報告済の X^{rns} のうち支払れていない (outstanding) 額を,
- X^{inr}，X^{cni} はともに報告されていない額を

表す．よって，未報告のため未払いとなっている額は

$$X^{\mathrm{nr}} = X^{\mathrm{inr}} + X^{\mathrm{cnr}}$$

である．

$$\mathcal{Z}_t^{\mathrm{nr}} = \mathcal{Z}_t^{\mathrm{inr}} \cup \mathcal{Z}_t^{\mathrm{cnr}}$$

とし，$N^{\mathrm{nr}}, Y_\iota^{\mathrm{nr}}$ を上と同様に定めれば

$$X^{\mathrm{nr}} = \sum_{\iota \leqq N^{\mathrm{nr}}} Y_\iota^{\mathrm{nr}}$$

とも表記できる．

未払保険金は次で与えられる．

$$X^{\mathrm{o}} = X^{\mathrm{orns}} + X^{\mathrm{nr}}.$$

これらの分布は，定理 2.1 で述べた分解と定理 1.3 の分布の計算から，求めることが可能である．

保険金見積もりの細分化

田 中 立 志
九州大学大学院数理学研究院

1　序

チェインラダー法によりクレーム額の推定を行うと, 前年度 0 であれば次年度以降も 0 である. しかし, 実際には諸事情により保険金 0 の次の年に 0 でない数字が現れることがある. これに対処すべく考案されたクレームのモデルが文献 [1] で取り扱われている.

クレームとは, 発生時刻 T と発生からのディベロップメント Z の組として定義される. クレーム額やクレーム頻度の情報はすべてディベロップメント Z のほうに組み込んで考える. クレーム (T, Z) を時系列で集めた集合をクレーム過程と呼ぶが, これはマーク付きポアソン過程であることが知られている. ここでは, 文献 [1] に従い, 従来考えられてきた年単位のクレーム過程を, より細分化したスパン単位のクレーム過程に置き換え, そのことによる利点と今後の課題について考察する.

2　クレーム過程

2.1　復習

クレームとは組 $C = (T, Z)$ のことである. ただし, T はクレームの発生時刻, Z は発生から支払完了までの経過（これをマークという）を表す.

クレーム過程とはクレームの族 $\{(T_\iota, Z_\iota)\}_{\iota=1,\ldots,N}$ のことをいう. 時刻 T_ι たちは, $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ としても一般性を失わない. これらの時刻は, 時間 $t > 0$ においてパラメーター $w(t)$ をもつ非斉次ポアソン過程により生成されている. より正確には,

$$\{N(t)\} \sim \mathrm{Po}(w(t); t \geq 0)$$

により,

$$T_\iota = \inf\{t > 0 | N(t) \geq \iota\}$$

と定義される.

以上のとき, クレーム過程 $\{(T_\iota, Z_\iota)\}$ は, 生起率 $w(t)$ と位置依存マーキング $P_{Z|t}$ のマーク付きポアソン過程と呼ばれ,

$$\{(T_\iota, Z_\iota)\}_{\iota=1,\ldots,N} \sim \mathrm{Po}(w(t), P_{Z|t}; t \geq 0)$$

で表す.

われわれは

$$Z_\iota = (J_\iota, Y_{J,\iota}, Y_{J+1,\iota}, \ldots, Y_{D,\iota}, G_\iota)$$

なる型のマークを考える. ただし, $J_\iota \in \{1, \ldots, D\}$,$Y_{J,\iota} + Y_{J+1,\iota} + \cdots + Y_{D,\iota} \geq 0$,$n \in \{0, \ldots, D - J\}$,$G_\iota \in \mathcal{C}$ である. 記号はそれぞれ,

ι: クレーム番号

J_ι: 経過年数

D: 支払完了年度

$Y_{k,\iota}$: 経過年度 k における当該年度保険金

G_ι: クレームのひとつの特徴

$\mathcal{C}$: クレームの特徴の族

を意味している.

これらのデータの下で, クレーム ι に対する最終累計保険金 R_D と支払備金 $IBNR_D$ は次式で与えられる.

$$R_D = \sum_{\substack{i \le D \\ D-i+1 \le k \le D}} Y_k,$$

$$IBNR_D = \sum_{\substack{j > D-i+1 \\ i \le D \\ D-i+1 \le k \le D}} Y_k.$$

2.2 クレーム過程の細分化

自然数 q をひとつ固定する. 区間 $[0,1]$ の分割を

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_q = 1$$

で与え, 分割されたそれぞれの区間を

$$i_m = (i,m) := [i-1+s_{m-1}, i-1+s_m) \quad (i=1,\ldots,D, m=1,\ldots,q)$$

とする. これにより, 1 年間を q 個の " シーズン " に分け, 年単位のクレーム分析をより細かくし, シーズンごとにクレームを分析することを考える.

クレーム番号 ι をひとつ固定し, 以後表記しない. (i,m,j,g)-クレームとは, シーズン i_m に発生し, j 年経過した, g という特徴を持つクレームのこととする. $N_{i,m,j,g} = N(i,m,j,g)$ を (i,m,j,g)-クレームの個数とし, (i,m,j,g,n)-クレームとして n 番目 $(1 \le n \le N_{i,m,j,g})$ の (i,m,j,g)-クレームのこととする. $Y_{i,m,j,k,g,n}$ として, 当該年度 k における (i,m,j,g,n)-クレームの当該年度保険金とすると, 前節最後のクレーム ι に対する最終累計保険金 R_D と支払備金 $IBNR_D$ は次式で与えられる.

$$R_D = \sum_{\substack{1 \le n \le N(i,m,j,g) \\ i \le D, j \le D \\ 1 \le m \le q \\ g \in G \\ D-i+1 \le k \le D}} Y_k,$$

$$IBNR_D = \sum_{\substack{1 \le n \le N(i,m,j,g) \\ i \le D \\ 1 \le m \le q \\ g \in G \\ D-i+1 < j \le k \le D}} Y_k.$$

(i,m,j,g)-クレームの族のことを (i,m,j,g)-クレーム過程と呼ぶことにしよう. Norberg [2] は以下の定理を示した.

定理 2.1（Norberg, 1999） (i,m,j,g)-クレーム過程はマーク付きポアソン過程である．さらに，各 (i,m,j,g)-クレーム過程は独立であり，(i,m,j,g)-クレームの生起率は

$$w_{i,m,j,g}(t) = w(t)P_{Z|t}(J=j, G=g) = w(t)P_{Z|t}(J=j|G=g)P_{Z|t}(G=g) \quad (t \in i_m)$$

である．

3 離散モデル

われわれは次の 4 つを見積もらなければならない．

(i) $w(t)$

(ii) $P_{Z|t}(G=g)$

(iii) $P_{Z|t}(J=j|G=g)$

(iv) (i,m,j,g) が与えられたときの $P_{Z|t}(Y_{J,\iota}, Y_{J+1,\iota}, \ldots, Y_{D,\iota})$．

3.1 $w(t)$

クレーム ι の生起率 $w(t)$ には，以下の仮定を設ける．

ある $w_i(i=1,\ldots,D), \sigma_m(m=1,\ldots,q)$ が存在し，$w(t) = w_i\sigma_m \ (t \in i_m)$ が成立する．

すなわち，クレームの生起率は事故年度とそのシーズンごとに定数であるとする．

3.2 $P_{Z|t}(G=g)$

クレームの特徴が g である分布 $P_{Z|t}(G=g)$ には，以下の仮定を設ける．

$$P_{Z|t}(G=g) = C\frac{e_{i,m,g}}{e_{i,m}}f(i,m,g).$$

ただし，$e_{i,m}$ はシーズン i_m におけるクレームのエクスポージャー，$e_{i,m,g}$ は i_m における g-クレーム（特徴 g をもつクレーム）のエクスポージャー，C は正の定数，$f(i,m,g)$ は正の値をとるとする．

3.3 $P_{Z|t}(J=j|G=g)$

特徴 G が与えられているときの，クレームの経過年数 J の分布 $P_{Z|t}(J=j|G=g)$ には，以下の仮定を設ける．

ある関数 r' が存在して，$P_{Z|t}(J=j|G=g) = r'(j,g,t-[t]) \ (t \in i_m)$．

これは J が事故発生年度とは独立であることを意味しており，チェインラダー法でもよくなされる仮定である．

3.4 結論1

前の3つの節での仮定により, 以下を結論付けることができる.

定理 3.1

$$E[N_{i,m,j,g}] = e_{i,m,g}Cw_i\sigma_m f(i,m,g)r(m,j,g).$$

証明

$$\begin{aligned} E[N_{i,m,j,g}] &= \int_{t\in(i,m)} e_{i,m}w_{i,m,j,g}(t)dt \\ &= e_{i,m,g}Cw_i\sigma_m f(i,m,g)\int_{t\in(i,m)} r'(j,g,t-[t])dt. \end{aligned}$$

最後の積分を $r(m,j,g)$ とおけばよい. ∎

3.5 (i,m,j,g) が与えられたときの $P_{Z|t}(Y_{J,\iota},Y_{J+1,\iota},\ldots,Y_{D,\iota})$

クレーム額の分布には, 以下の2つの仮定を設ける.

〔I〕

$$P_{Z|t}(Y_J,Y_{J+1},\ldots,Y_D) = P(Y_J,Y_{J+1},\ldots,Y_D) \quad (t\in i_m).$$

すなわち, $(Y_J,Y_{J+1},\ldots,Y_D)$ は区間 i_m にのみ依存し, (i,m,j,g) が与えられたときに同分布に従う. たとえば, 区間 i_m のはじめにすべての保険金の支払いが発生するなどの状況では, この仮定が満たされる.

〔II〕

ある関数 h が存在して, 任意の $k\in\{j+1,\ldots,D\}$ に対して,

$$P_{Z|t}(Y_k|Y_{k-1},\ldots,Y_j) \sim P_{Z|t}(Y_k|h(Y_{k-1},\ldots,Y_j)).$$

関数 h としてはたとえば, 保険金の総額 $S_k = Y_k+\cdots+Y_j$ などを用いる. たとえば, もし確率過程 (S_k) がマルコフ過程であれば, $h(Y_{k-1},\ldots,Y_j)=S_k$ として仮定が満たされる.

3.6 結論2

以上の仮定の下で, 以下が成立する.

定理 3.2

$$P_t(Y_D,Y_{D-1},\ldots,Y_j) = P(Y_D|h(Y_{D-1},\ldots,Y_j))P(Y_{D-1}|h(Y_{D-2},\ldots,Y_j))\cdots P(Y_j) \quad (t\in i_m).$$

3.7 準備すべきデータ

以上のような離散モデルを考えるために準備すべきデータは,

$N_{i,m,j,g}$ $(i+j-1 \leq D)$: 発生年度 + 経過年数 −1 が D 以下である (i,m,j,g)-クレームの個数

$Y_{i,m,j,k,g,\iota}$ $(i+j-1 \leq D, j \leq k)$: 発生年度 + 経過年数 −1 が D 以下である, 報告済みの (i,m,j,g)-クレーム額

の 2 点である.

4 考察

まず, 文献 [1] によると, このような細かい分析を行うほうが, 分布のより精度のよいフィッティングを行うことができる. 海外では損害保険業務においてこのようなことを行っているのかもしれない. また, クレームの特徴 G の情報を加味したことにより, ランオフ三角形を用いた将来予測において 0 という数字から 0 でない数字を導き出すことも可能になる, としてある. このことはチェインラダー法やその他今までの統計的見積法においてはできなかったことであり, 保険実務における利点となり得る.

しかしながら, 情報を細分化したことによって, 個々の分析を個々の場合のデータに基づいて行う必要がある. それだけのデータが揃うか, あるいは分析に要する時間は大きくなりすぎないか, 計算機上で計算可能か, などの疑問点が残る. さらに, クレームの特徴 G の把握をどのように行うのかは, 数学では統制できない問題かもしれない.

参考文献

[1] Christian Roholte Larsen, *An Individual Claims Reserving Model*, Astin Bull., 37(1) 2007, 113-132.

[2] R. Noberg, *Prediction of outstanding liabilities in non-life insurance*, Astin Bull., 23 1993, 95-115.

共同研究中間発表会における参考資料
– 確率論・線形計画法・ガウス推定 –

谷 口 説 男
九州大学大学院数理学研究院

はじめに

平成 20 年 6 月 26 日に，共同研究の準備にあたり，日本アクチュアリー協会刊行「モデリング」に関連する数学的準備について解説を行った．その折に資料として用意したノートを加筆修正し，中間報告会参考資料として配布した．これは，その資料にさらに加筆修正を施したものである．つぎの 3 つの話題に触れる．

- 「モデリング」3 章「確率過程」に関連して
- 「モデリング」5 章「線形計画法」に関連して
- ガウス線形推定とガウス可測推定

A　「モデリング」3 章「確率過程」に関連して

ここでは,「モデリング」3 章「確率過程」に関連する数学的側面を概説する．

A.1　確率論から

確率論の基本的な事実について簡単に復習しよう．まず，いくつか定義と記号を列挙する．

Ω を集合とし，$2^\Omega = \{A \,|\, A \subset \Omega\}$ とおく．$\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ が **$\boldsymbol{\sigma}$ 加法族**であるとはつぎの 3 条件がみたされることをいう．

(1) $\Omega, \emptyset \in \mathcal{F}$,

(2) $A \in \mathcal{F}$ ならば，$\Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \notin A\} \in \mathcal{F}$,

(3) $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$，ならば，$\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ を σ 加法族とする．$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の**確率測度** P とは，つぎの 2 条件をみたす写像 $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ をいう;

(1) $P(\Omega) = 1$,

(2) P は **$\boldsymbol{\sigma}$ 加法性**をもつ，すなわち，$A_n \in \mathcal{F}$ かつ $A_n \cap A_m = \emptyset$ $(m \neq n)$ ならば,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty P(A_n)$$

が成り立つ．

三つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を**確率空間**と呼ぶ．

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ が**確率変数**であるとは，X が $\mathcal{F}$-可測であること，すなわち

$$\{X \leqq a\} \overset{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leqq a\} \in \mathcal{F}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

が成り立つことをいう．

確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ の**期待値** $E[X]$ を以下のように定義する．$n \in \mathbb{N}$，$a_i \in \mathbb{R}$，$A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, \ldots, n)$ を用いて $X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$ と表現できる確率変数の全体を $\mathbb{S}$ とおく．ただし，$\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ $(\omega \in A)$，$= 0$ $(\omega \notin A)$ である．このとき，

$$E[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i P(A_i), & (X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i} \in \mathbb{S} \text{ の場合}) \\ \sup\bigl\{E[Y] \,\big|\, Y \in \mathbb{S}, 0 \leqq Y \leqq X\bigr\}, & (X \geqq 0 \text{ の場合}) \\ E[X^+] - E[X^-], & (\text{一般の } X \text{ で } \min\{E[X^+], E[X^-]\} < \infty \text{ の場合}) \end{cases}$$

ただし，$X^{\pm}(\omega) = \max\{0, \pm X(\omega)\}$ とする．$E[|X|] < \infty$ となるとき X は**可積分**であるという．

X の分散 $V(X)$，特性関数 $\varphi_X(t)$，分布関数 $F_X(x)$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} &V(X) = E[X^2] - (E[X])^2, \\ &\varphi_X(t) = E[\exp(\sqrt{-1}\, tX)] \quad , t \in \mathbb{R}, \\ &F_X(x) = P(X \leqq x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ただし，$V(X)$ の定義においては，$E[X^2] < \infty$ を仮定している．

$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を σ 加法族とする．可積分な確率変数 X に対し，次をみたす $\mathcal{G}$ 可測関数 Y が唯一存在し，それを $E[X|\mathcal{G}]$ と表し，X の $\mathcal{G}$ で条件付けた**条件付き期待値**という．

$$E[XZ] = E[YZ], \quad \forall Z : \Omega \to \mathbb{R}\,(\mathcal{G} \text{ 可測かつ有界}).$$

$A \in \mathcal{F}$ に対し，$P(A|\mathcal{G}) = E[\mathbf{1}_A|\mathcal{G}]$ とおき，A の $\mathcal{G}$ で条件付けた**条件付き確率**という．もし $E[X^2] < \infty$ ならば，

$$E[(X - E[X|\mathcal{G}])^2] = \min\{E[(X-Y)^2] \,|\, E[Y^2] < \infty, Y \text{ は } \mathcal{G}\text{-可測}\}$$

が成り立つ．この意味で，条件付き期待値は直交射影である．条件付期待値が，高校で学んだ条件付確率と関連していることがつぎのような考察からいえる．$B \in \mathcal{F}$ は $P(B)P(B^c) \neq 0$ をみたすとする．$\mathcal{G} = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$，$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ とおく．このとき

$$P(A|\mathcal{G}) = P(A|B)\mathbf{1}_B + P(A|B^c)\mathbf{1}_{B^c}.$$

条件付期待値は，$\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ ならば，

$$E[X|\mathcal{G}] = E\bigl[E[X|\mathcal{H}]\big|\mathcal{G}\bigr]$$

という関係をみたす．

確率変数の列 $Y_1, Y_2, \ldots$ に対し，

$$\mathcal{F}^{Y_1, Y_2, \cdots} = \bigcap_{\mathcal{G} \in \Lambda} \mathcal{G}, \quad (\Lambda = \{\mathcal{G} \,|\, \mathcal{G} \text{ は } \sigma \text{ 加法族で } \{Y_j \leq a\} \in \mathcal{G}, \forall j = 1, 2, \ldots, a \in \mathbb{R}\})$$

とおく．$E[X|\mathcal{F}^{Y_1,Y_2,\cdots}]$ を $E[X|Y_1,Y_2,\ldots]$ と表し，$E[X|\mathcal{F}^Y]$ を $E[X|Y]$ と表す．

確率変数 $X,Y_1,\ldots,Y_n$ に対し，$E[X|\mathcal{F}^{Y_1,\ldots,Y_n}]=g(Y_1,\ldots,Y_n)$ となる $g:\mathbb{R}^n\ni(y_1,\ldots,y_n)\mapsto g(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}$ が唯一存在する．それを

$$E[X|Y_1=y_1,\ldots,Y_n=y_n]$$

と表す．次の関係式をみたす $\mathbb{R}^n$ 上の確率測度 $\mu^{Y_1,\ldots,Y_n}$ が唯一存在する;

$$\mu^{Y_1,\ldots,Y_n}\big((-\infty,a_1]\times(-\infty,a_n]\big)=P(\{Y_1\leqq a_1,\ldots,Y_n\leqq a_n\}),\quad a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}.$$

有界な連続関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ に対し，次式が成り立つ．

$$E[Xf(Y_1,\ldots,Y_n)]=\int_{\mathbb{R}^n}E[X|Y_1=y_1,\ldots,Y_n=y_n]f(y_1,\ldots,y_n)\mu^{Y_1,\ldots,Y_n}(dy_1\ldots dy_n).$$

期待値，条件付期待値に関するいくつかの性質を挙げよう．まず，$a,b\in\mathbb{R}$ と可積分な確率変数 X,Y に対し，

$$E[aX+bY]=aE[X]+bE[Y],\quad E[aX+bY|\mathcal{G}]=aE[X|\mathcal{G}]+bE[Y|\mathcal{G}]$$

が成り立つ．これは，**線形性**と呼ばれる性質である．つぎに，**正値性**と呼ばれるつぎのような性質も成り立つ; もし $X\geqq 0$ ならば,

$$E[X]\geqq 0,\quad E[X|\mathcal{G}]\geqq 0.$$

さらに，もし，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が下に凸ならば,

$$f\Big(E[X]\Big)\leqq E[f(X)],\quad f\Big(E[X|\mathcal{G}]\Big)\leqq E[f(X)|\mathcal{G}].\qquad \textbf{(イェンセンの不等式)}$$

期待値は，分布関数 F_X に関する Stieltjes 積分を用いて次のように表現できる．

$$E[g(X)]=\int_{\mathbb{R}}g(x)F_X(dx)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n2^n}^{n2^n}g(k2^{-n})\big\{F_X((k+1)2^{-n})-F_X(k2^{-n})\big\}.$$

これより，もし X が離散型，すなわち $a_1,a_2,\ldots$ が存在し $\sum_{j=1}^{\infty}P(X=a_j)=1$ が成り立つならば,

$$E[g(X)]=\sum_{j=1}^{\infty}g(a_j)P(X=a_j)$$

である．また，X が連続型，すなわち $f_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が存在し $F_X(a)=\int_{(-\infty,a]}f_X(x)dx$ が成り立つならば,

$$E[g(X)]=\int_{\mathbb{R}}g(x)f_X(x)dx$$

となる．

確率変数 $X_1,X_2,\ldots$ が独立とは次が成り立つことをいう．

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i\leqq a_i\}\Big)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\leqq a_i),\quad \forall n\in\mathbb{N},a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}.$$

X,Y が独立ならば $E[XY]=E[X]E[Y]$ が成り立つ．$X_1,X_2,\dots$ が独立であるための必要十分条件は次が成り立つことである．

$$\varphi_{\sum_{j=1}^n a_jX_j}(t)=\prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(a_jt),\quad \forall n\in\mathbb{N},a_1,\dots,a_n,t\in\mathbb{R}.$$

X が $\mathcal{G}$ と独立，すなわち，$P(\{X\leqq a\}\cap A)=P(X\leqq a)P(A)$ $(\forall a\in\mathbb{R},A\in\mathcal{G})$ が成り立つならば，

$$E[X|\mathcal{G}]=E[X]$$

が成り立つ．

A.2 確率過程とは

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ を確率空間とする．$\mathbb{T}\subset[0,\infty)$ とし，$t\in\mathbb{T}$ でパラメータづけられた確率変数 X_t の列 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を**確率過程 (stochastic process)** という．$\omega\in\Omega$ に対し $t\mapsto X_t(\omega)$ を見本過程という．

A.3 マルコフ連鎖

A.3.1 マルコフ連鎖とマルチンゲール

$\mathbb{T}=[0,\infty)$ もしくは $\mathbb{T}=\mathbb{Z}_+$ とする．ただし，$\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,\dots\}$ である．確率過程 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ が**マルコフ過程** (Markov process) であるとは，任意の $a\in\mathbb{R}$ と $s_1<\cdots<s_n$ なる $s_1,\dots,s_n\in\mathbb{T}$ に対し次が成り立つことをいう．

$$P\bigl(\{X_t\leqq a\}\bigm| X_{s_1}=x_1,X_{s_2}=x_2,\dots,X_{s_n}=x_n\bigr)=P\bigl(\{X_t\leqq a\}\bigm| X_{s_n}=x_n\bigr).$$

可算集合 $S\subset\mathbb{R}$ が存在し $P(X_t\in S,\forall t)=1$ となるとき，$\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を**マルコフ連鎖** (Markov chain) という．この S を状態空間という．

σ 加法族 $\mathcal{F}_t\,(\subset\mathcal{F})$ が，$s\leqq t$ なる任意の $s,t\in\mathbb{T}$ に対し，$\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$ を満たすとき，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を**フィルトレーション**という．$\{M_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ が，フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ に関する**マルチンゲール**であるとは以下のという 3 条件が成り立つことをいう．

(1) すべての t に対し，M_t は可積分である．

(2) 各 t に対し，M_t は $\mathcal{F}_t$-可測である，すなわち，$\{M_t\leqq a\}\in\mathcal{F}_t$ $(\forall a\in\mathbb{R})$.

(3) 任意の $s<t$ に対し，$E[M_t|\mathcal{F}_s]=M_s$.

例 A.1 $Y_1,Y_2,\dots$ は独立であるとする．$N_t=\sum_{s=1}^t Y_s$ とおく．このとき，任意の $a\in\mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned}P\bigl(\{N_{t+1}\leqq a\}\bigm| N_1=x_1,\dots,N_t=x_t\bigr)&=P\bigl(\{Y_{t+1}+N_t\leqq a\}\bigm| N_1=x_1,\dots,N_t=x_t\bigr)\\&=P\bigl(\{Y_{t+1}+x_t\leqq a\}\bigr)=P\bigl(\{Y_{t+1}+N_t\leqq a\}\bigm| N_t=x_t\bigr)=P\bigl(\{N_{t+1}\leqq a\}\bigm| N_t=x_t\bigr)\end{aligned}$$

となり，$\{N_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ はマルコフ過程である．

さらに，$E[Y_j]=0$ $(\forall j)$ と仮定する．$\mathcal{F}_t=\mathcal{F}^{Y_1,\dots,Y_t}$ とおけば，

$$E[N_{t+1}|\mathcal{F}_t]=E[Y_{t+1}+N_t|\mathcal{F}_t]=E[Y_{t+1}]+N_t=N_t$$

となり，$\{N_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ はマルチンゲールである．

A.3.2　推移確率行列とチャップマン・コルモゴロフの方程式

ボレル集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対し，$P(s,x;t,A) = P(X_t \in A|X_s = x)$ をマルコフ過程 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ の推移確率 (transition probability) という．ただし $s \leq t$ とする．推移確率 $P(s,x;t,A)$ の満たす

$$P(s,x,u,A) = \int_{\mathbb{R}} P(s,x,t,dy)P(t,y,u,A)$$

という関係式を **Chapman-Kolmogorov の方程式**という．

推移確率 $P(s,x;t,A)$ が s,t に関しては差 $t-s$ の関数になるときマルコフ過程は**時間的に一様である**という．状態空間 S をもつ時間的に一様なマルコフ連鎖に対し，$p_t(x,y) = P(X_t = y|X_0 = x)$ $(x,y \in S,\, t \in \mathbb{T})$ とおき，$\{p_t(x,y)\}_{x,y\in S}$ を**推移行列**という．推移行列 $p_t(x,y)$ は次を満たす．

$$0 \leqq p_t(x,y) \leqq 1, \quad \sum_{y\in S} p_t(x,y) = 1, \quad p_{s+t}(x,y) = \sum_{z\in S} p_t(x,z)p_s(z,y).$$

これは, Chapman-Kolmogorov の方程式を, マルコフ連鎖の場合に書き直したものに他ならならない．$\mathbb{T} = \mathbb{Z}_+, S = \{1,\ldots,n\}$ とする．$n\times n$ 行列 P を $P = \big(p_1(i,j)\big)_{1\leqq i,j\leqq n}$ とおけば, $p_t(i,j) = (P^t)_{ij}$ である．

「モデリング」で述べられている例を再掲する．

例 A.2 ある従業員の健康状態が良好を 1，不良を 2 と表す．時刻 n における従業員の健康状態を X_n と表す．つぎの二つの仮定をおく．

【仮定 1】マルコフ性: 翌日の健康状態はその日の健康状態にのみ依存する．

$$P(X_{n+1} = \varepsilon_{n+1}|X_1 = \varepsilon_1,\ldots,X_n = \varepsilon_n) = P(X_{n+1} = \varepsilon_{n+1}|X_n = \varepsilon_n), \quad \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n+1} \in \{1,2\}.$$

【仮定 2】良好→良好となる確率は 0.98，不良→良好は 0.70．

$$P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = 0.98, \quad P(X_{n+1} = 1|X_n = -1) = 0.70.$$

このとき推移行列 $P = (p_1(i,j))$ は

$$P = \begin{pmatrix} 0.98 & 0.02 \\ 0.70 & 0.30 \end{pmatrix}$$

となる．

$p_n(1,2)$ は当初は健康であった社員が時刻 n には不調となっていることを意味する．これは $(P^n)_{12}$ として計算される．

$P^\infty = \lim_{n\to\infty} P^n$ とすれば，$P^\infty = PP^\infty$ より，$P^\infty = (I-P)^{-1}$ である．$(P^\infty)_{11}$，$(P^\infty)_{12}$，$(P^\infty)_{21}$，$(P^\infty)_{22}$ は，健康な社員が最終的に健康である確率，健康な社員が最終的に不健康である確率，不健康な社員が最終的に健康である確率，不健康な社員が最終的に不健康である確率，をそれぞれ表している．

A.3.3　推移行列の応用

やはり,「モデリング」にある例を再掲する．健康状態の推移をより詳しく分類する．

タイプ	昨日	今日	翌日	確率
A	○	○	○	0.99
B	×	○	○	0.95
C	○	×	○	0.80
D	×	×	○	0.60

この表は，昨日今日がともに○ならば，翌日が○である確率は0.99，翌日が×である確率は0.01というように，条件付き確率として読む．

$S = \{1, 2, 3, 4\}$ とし，それぞれ次のような状態を表すとする．

状態	昨日	今日
1	○	○
2	×	○
3	○	×
4	×	×

昨日・今日が i，今日・明日が j という状態の変化は上のタイプと次のように対応する．

	1	2	3	4
1	A	なし	$\overline{\mathrm{A}}$	なし
2	B	なし	$\overline{\mathrm{B}}$	なし
3	なし	C	なし	$\overline{\mathrm{C}}$
4	なし	D	なし	$\overline{\mathrm{D}}$

となる．これより対応するマルコフ連鎖の推移行列は

$$P = \begin{pmatrix} 0.99 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0.95 & 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.80 & 0 & 0.20 \\ 0 & 0.60 & 0 & 0.40 \end{pmatrix}.$$

これより，昨日，今日と元気な従業員が1週間後に病気となるのは

$$(P^7)_{1,3} + (P^7)_{1,4}$$

として求められる．

A.4 ポアソン過程

A.4.1 ポアソン過程

確率過程 $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ が**加法過程** (additive process) であるとは，次の4条件が満たされるときをいう．

(a) (独立増分性) 任意の $n \in \mathbb{N}$ $0 \leqq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対し，$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ は独立である．

(b) $P(X_0 = 0) = 1$.

(c) (確率連続性) 任意の $\varepsilon > 0$ と $t \geqq 0$ に対し，$\lim_{s \to t} P(|X_s - X_t| > \varepsilon) = 0$.

(d) 確率 1 で見本関数 $t \mapsto X_t$ はで右連続かつ左極限をもつ (**càdlàg** という).

加法過程がさらに,

(e) (定常増分性) 任意の $s, t \geqq 0, a \in \mathbb{R}$ に対し，$P(X_{s+t} - X_s \leqq a) = P(X_t \leqq a)$

という性質を持つとき**レヴィ過程** (Lévy process) という．

レヴィ過程 $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ に対し，その特性関数はつぎのような形をした $\psi(z)$ を用いて $\varphi_{X_t}(z) = \exp(t\psi(z))$ と表示できる．

$$\psi(z) = \sqrt{-1}\, mz - \frac{v}{2} z^2 + \int_{\mathbb{R}} \Big(e^{\sqrt{-1}\, zu} - 1 - \frac{\sqrt{-1}\, zu}{1 + u^2} \Big) n(du).$$

ここで $m \in \mathbb{R}$，$v \geqq 0$ かつ $n(du)$ は $n(\{0\}) = 0$，$\int_{-\infty}^{\infty} u^2/(1+u^2) n(du) < \infty$ となる $\mathbb{R}$ の上の測度である．3 つ組 (v, n, m) は一意的に定まる．3 つ組 (v, n, m) をレヴィ過程 $\{X_t\}_{t \in [0,\infty)}$ の**生成要素** (generating triplet) という．

任意の n，$t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$ および $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ に対して,

$$P(\{X_{t_1+t} \leqq a_1, \ldots, X_{t_n+t} \leqq a_n\}) = P(\{X_{t_1} \leqq a_1, \ldots, X_{t_n} \leqq a_n\}), \quad \forall t$$

が成り立つとき，$\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ を**強定常過程** (strongly stationary process) という．$E[|X_t|^2]$ がつねに有限で,

$$E[X_{t+h}] = E[X_t], \quad E[X_{t+h} X_{s+h}] = E[X_t X_s], \quad \forall s, t \in \mathbb{T}$$

が成り立つとき，$\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ を**弱定常過程** (weakly stationary process) という．

確率過程 $\{N_t\}_{t \in [0,\infty)}$ が**計数過程**であるとは，以下の 3 条件を満たすことをいう．

(i) $P(N_0 = 0) = 1$.

(ii) $P(N_t \in \mathbb{Z}_+, \forall t \geqq 0) = 1$，$t \mapsto N_t$ は単調増加である．

(iii) càdlàg である．

計数過程 $\{N_t\}_{t \in [0,\infty)}$ が，レヴィ過程であり，さらに $P(N_{t+h} - N_t \geqq 2) = o(h)$ $(h \downarrow 0)$ を満たすとき**ポアソン過程** (Poisson process) という．

ポアソン過程に関する幾つかの性質を挙げる．

命題 A.3 $\{N_t\}_{t \in [0,\infty)}$ をポアソン過程とする．$\lambda > 0$ が存在し，次が成り立つ．

$$P(N_{t+s} - N_s = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad s, t \geqq 0, n \in \mathbb{Z}_+.$$

この λ を生起率という．

証明 $s=0$ のときに示せばよい．$p_n(t)=P(N_t=n)$ とおく．独立増分性と定常増分性より

$$p_0(t)=P\biggl(\bigcap_{k=0}^{n-1}\{N_{(k+1)t/n}-N_{kt/n}=0\}\biggr)=p_0(t/n)^n.$$

これより $p_0(q)=p_0(1)^q$ $(q\in\mathbb{Q})$ となる．càdlàg であることより，$\lambda=-\log p_0(1)$ とすれば，$p_0(t)=e^{-\lambda t}$ となる．

同様の議論を $p_1(t)$ に適用すれば，

$$p_1(t)=np_1(t/n)p_0(t/n)^{n-1}=np_1(t/n)e^{\lambda t/n}e^{-\lambda t}.$$

よって $q_1(t)=p_1(t)e^{\lambda t}$ とおけば，$q_1(t)=nq_1(t/n)$．これより $\mu\geqq 0$ が存在し，$q_1(t)=\mu t$，すなわち，$p_1(t)=\mu te^{-\lambda t}$ が成り立つ．

$[t,t+h]$ の間に派生した回数について場合分けすれば，独立増分性より

$$\begin{aligned}p_n(t+h)&=\sum_{k=0}^{n}P\bigl(N_{t+h}-N_t=k,N_t=n-k\bigr)\\&=p_0(h)p_n(t)+p_1(h)p_{n-1}(t)+\sum_{k=2}^{n}p_k(h)p_{n-k}(t).\end{aligned}$$

これより

$$p_n(t+h)-p_n(t)=(e^{-\lambda h}-1)p_n(t)+\mu he^{-\lambda h}p_{n-1}(t)+o(h).$$

よって

$$\frac{d}{dt}p_n(t)e^{\lambda t}=\mu p_{n-1}(t)e^{\lambda t}, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}p_n(t)e^{\lambda t}&=\int_0^t ds_1\mu p_{n-1}(s_1)e^{\lambda s_1}\\&\vdots\\&=\int_0^t ds_1\int_0^{s_1}ds_2\dots\int_0^{s_{n-2}}ds_{n-1}\mu^{n-1}p_1(s_{n-1})e^{\lambda s_{n-1}}=\mu^n\frac{t!}{n!}.\end{aligned}$$

以上より $p_0(t)=e^{-\lambda t}$，$p_n(t)=\{(\mu t)^n/n!\}e^{-\lambda t}$ となる．$\sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)=1$ であるから，$\mu=\lambda$ となり，主張を得る． ∎

命題 A.4 計数過程 $\{N_t\}$ は加法過程であるとする．ポアソン過程であるための必要かつ十分条件は次の 2 条件が成り立つことである．

$$P(N_{t+h}-N_t=1)=\lambda h+o(h),\quad P(N_{t+h}-N_t\geqq 2)=o(h).$$

証明 必要性は容易に分かる．先と同様の考察と $p_0(h)=1-p_1(h)-P(N_h\geqq 2)=1-\lambda h+o(h)$ となることから，$\mu=\lambda$ として (14) が成り立つ．これより十分性が得られる． ∎

命題 A.5 計数過程 $\{N_t\}$ は加法過程であるとする．非負関数 $\lambda:[0,\infty)\to[0,\infty)$ が存在し，

$$P(N_{t+h}-N_t=1)=\lambda(t)h+o(h),\quad P(N_{t+h}-N_t\geqq 2)=o(h) \tag{15}$$

を満たすとする．このとき，$\Lambda(s,t)=\displaystyle\int_s^{t+s}\lambda(u)du$ とおけば，

$$P\bigl(N_{t+s}-N_s=n\bigr)=\frac{\Lambda(s,t)^n}{n!}e^{-\Lambda(s,t)},\quad n=0,1,\dots$$

このような計数過程を**強度関数** $\lambda(t)$ をもつ**非斉次ポアソン過程**といい，$\tau(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ を**オペレーショナルタイム**という．

証明 $s \geqq 0$ を固定し，$M_t = N_{t+s} - N_s$ とおく．$p_n(t) = P(M_t = n)$ とおけば，先と同様の議論により

$$p_n(t+h) = (1 - \lambda(t+s)h)p_n(t) + \lambda(t+s)hp_{n-1}(t) + o(h)$$

を得る．これより $p'_n(t) = -\lambda(t+s)p_n(t) + \lambda(t+s)p_{n-1}(t)$ という微分方程式を得，これを解いて主張を得る． ∎

命題 A.6 $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ はポアソン過程とし，連続非負な $\lambda : [0,\infty) \to [0,\infty)$ に対し $\Lambda(s,t) = \displaystyle\int_s^{t+s} \lambda(u)du$ とおく．$\{N_t = \widetilde{N}_{\Lambda(0,t)}\}$ は (15) を満たす加法過程である．

証明 $\Lambda(0, t+h) - \Lambda(0,t) = \lambda(t)h + o(h)$ であることによる． ∎

命題 A.7 ((「損保数理」7.2 の主張と証明の修正)) 計数過程 $\{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ は加法過程であるとする．$\tau(t) = -\log P(N_t = 0)$ は t に関し連続であると仮定する．さらに $P(N_{t+h} - N_t \geqq 2) = o(h)$ を仮定する．このとき

$$P(N_{t+s} - N_s = n) = \frac{\tau(s,t+s)^n}{n!}e^{-\tau(s,t+s)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{16}$$

ただし，$\tau(u,v) = \tau(v) - \tau(u)$ とする．さらに $\sigma(t) = \inf\{s \,|\, \tau(s) > t\}$，$\widetilde{N}_t = N_{\sigma(t)}$ とおけば，$\{\widetilde{N}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ はポアソン過程である．

証明 独立増分性より，$P(N_{t+h} = 0) = P(N_{t+h} - N_t = 0)N(N_t = 0)$ となる．すなわち，$e^{-\tau(t+h)} = P(N_{t+h} - N_t = 0)e^{-\tau(t)}$．よって

$$P(N_{t+h} - N_t = 0) = e^{-\tau(t,t+h)}.$$

余事象の確率の計算と仮定により

$$\begin{aligned} P(N_{t+h} - N_t = 1) &= 1 - P(N_{t+h} - N_t = 0) - P(N_{t+h} - N_t \geqq 2) \\ &= 1 - e^{-\tau(t,t+h)} + o(h) \\ &= \tau(t,t+h) + o(\tau(t,t+h)) + o(h). \end{aligned}$$

$s \geqq 0$ を固定し，$p_n(t) = P(N_{t+s} - N_s = n)$，$\tau^s(t) = \tau(s, t+s)$ とおく．独立増分性に注意すれば，

$$\begin{aligned} p_n(t+h) = P(N_{t+s+h} &- N_{t+s} = 0)P(N_{t+s} - N_s = n) \\ &+ P(N_{t+s+h} - N_{t+s} = 1)P(N_{t+s} - N_s = n-1) \\ &+ P(N_{t+s+h} - N_{t+s} \geqq 2, N_{t+s+h} = n) \\ = e^{-\tau(t+s,t+s+h)}&p_n(t) + \{\tau(t,t+h) + o(\tau(t,t+h))\}p_{n-1}(t) + o(h). \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} p_n(t+h) - p_n(t) = -\tau(t+s, t+s+h)p_n(t) &+ \tau(t+s,t+s+h)p_{n-1}(t) \\ &+ o(\tau(t+s,t+s+h)) + o(h). \end{aligned}$$

Stieltjes 積分として表記すれば，

$$p_n(dt) = -p_n(t)\tau^s(dt) + p_{n-1}(t)\tau^s(dt).$$

これより

$$d(p_n e^{\tau^s}) = p_{n-1}e^{\tau^s}d\tau^s$$

という微分方程式を得る．これを帰納的に解けば

$$p_n e^{\tau^s} = \frac{(\tau^s)^n}{n!}, \quad \text{すなわち } p_n(t) = \frac{(\tau^s(t))^n}{n!}e^{-\tau^s(t)}.$$

つまり (16) がしたがう．

$\{\widetilde{N}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ が計数過程であり，さらに加法過程となっていることは容易にいえる．$\tau(\sigma(t)) = t$ に注意すれば，(16) より

$$P(\widetilde{N}_{t+s} - \widetilde{N}_s = n) = \frac{t^n}{n!}e^{-t}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

となる．すなわち，定常性もしたがう．よって $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ はポアソン過程となる． ∎

$\{\widetilde{N}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ はポアソン過程とし，$\{U_t\}_{[0,\infty)}$ はそれとは独立な非負値確率過程で，$E[U_1] = 1$ を満たすとする．$\lambda > 0$ とする．$N_t = \widetilde{N}_{(\lambda U_t)t}$ とおく．$\{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ を**一般化されたポアソン過程**という．

命題 A.8 うえのような一般化されたポアソン過程にたいし，

$$P(N_t = n) = \int_{\mathbb{R}} \frac{(\lambda ut)^n}{n!}e^{-\lambda ut}\mu^{U_t}(du)$$

が成り立つ．ただし $\mu^{U_t}(A) = P(U_t \in A)$.

このように，独立なランダムな時間を代入する手法を**斜積** (skew product) という．

証明 U_t と $\widetilde{N}_t$ の独立性より

$$\begin{aligned}P(N_t = n) &= \int_{\mathbb{R}} P(\widetilde{N}_{\lambda U_t t} = n | U_t = u)\mu^{U_t}(du) = \int_{\mathbb{R}} P(\widetilde{N}_{\lambda ut} = n | U_t = u)\mu^{U_t}(du) \\ &= \int_{\mathbb{R}} P(\widetilde{N}_{\lambda ut} = n)\mu^{U_t}(du) = \int_{\mathbb{R}} \frac{(\lambda ut)^n}{n!}e^{-\lambda ut}\mu^{U_t}(du).\end{aligned}$$

∎

命題 A.9 (i) $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots$ は独立な確率変数で $P(T_j - T_{j-1} \leqq a) = \max\{1 - e^{-\lambda a}, 0\}$ $(a \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N})$ を満たすとする．$N_t = \max\{n \in \mathbb{Z}_+ \,|\, T_n \leqq t\}$ $(T_0 = 0)$ とおくと，$\{N_t\}_{t\in[0,\infty)}$ はポアソン過程である．

(ii) $\{N_t\}$ を λ のポアソン過程とする．$T_n = \inf\{t \geqq 0 \,|\, N_t \geqq n\}$ とおく (N_t が始めて $n \in \mathbb{Z}_+$ 以上となる時刻)．このとき，$T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots$ は独立な確率変数で $P(T_j - T_{j-1} \leqq a) = \max\{1 - e^{-\lambda a}, 0\}$ $(a \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N})$ を満たす．

証明 $D_j = T_j - T_{j-1}$ とおく．
(i) 独立性に注意して計算すれば，つぎを得る．

$$P(T_j \leqq a) = \int_0^a f_{T_j}(x)dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \text{ただし } f_{T_j}(x) = \frac{\lambda^j x^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}.$$

Z, W が独立で W が分布密度関数 f_W をもてば，

$$P(a \leqq Z + W \leqq b, c \leqq W \leqq d) = \int_c^d P(a \leqq Z + w \leqq b) f_W(w) dw$$

という関係式が成り立つので，D_j 達の独立性より，

$$\begin{aligned}
&P(N_{t+s} - N_s = k, N_s = j) = P(N_{t+s} = k + j, N_s = j) \\
&= P(T_j \leqq s, T_{j+1} > s, T_{k+j} \leqq t + s, T_{k+j+1} > t + s) \\
&= P(T_j \leqq s, D_{j+1} + T_j > s, (T_{k+j} - T_j) + T_j \leqq t + s, (T_{k+j+1} - T_j) + T_j > t + s) \\
&= \int_0^s du f_{T_j}(u) P(D_{j+1} + u > s, T_{k+j} - T_j + u \leqq t + s, T_{k+j+1} - T_j + u > t + s) \\
&= \int_0^s du f_{T_j}(u) P(D_{j+1} + u > s, T_{k+j} - T_{j+1} + D_j + u \leqq t + s, T_{k+j+1} - T_{j+1} + D_j + u > t + s) \\
&= \int_0^s du f_{T_j}(u) \int_{s-u}^{t+s-u} dv f_{D_j}(v) P(T_{k+j} - T_{j+1} + v + u \leqq t + s, T_{k+j+1} - T_{j+1} + v + u > t + s) \\
&= \int_0^s du f_{T_j}(u) \int_{s-u}^{t+s-u} dv f_{D_j}(v) \int_0^{t+s-u-v} dw f_{T_{k+j}-T_{j+1}}(w) P(D_{k+j+1} + w + v + u > t + s) \\
&= \int_0^s du \frac{\lambda^j u^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda u} \int_{s-u}^{t+s-u} dv \lambda e^{-\lambda v} \int_0^{t+s-u-v} dw \frac{\lambda^{k-1} w^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda w} e^{-\lambda(t+s-u-v-w)} \\
&= \lambda^{k+j} e^{-\lambda(t+s)} \frac{t^k s^j}{k! j!}.
\end{aligned}$$

k, j それぞれについて和をとれば

$$P(N_{t+s} - N_s = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad P(N_s = j) = \frac{(\lambda s)^j}{j!} e^{-\lambda s}$$

となる．これを上とあわせて $N_{t+s} - N_s$ と N_s は独立となる．命題 A.7 と同様にして，$\{N_t\}_{t \geqq 0}$ はポアソン過程であるといえる．

(ii) 一般の場合も同様なので，簡単のため

$$P(T_2 - T_1 \leqq a, T_1 \leqq b) = (1 - e^{-\lambda a})(1 - e^{-\lambda b})$$

となることだけを示す．

$$
\begin{aligned}
&P(T_2 - T_1 \leqq a, T_1 \leqq b)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P\biggl(\frac{kb}{n} < T_1 \leqq \frac{(k+1)b}{n}, T_2 \leqq a + \frac{(k+1)b}{n}\biggr)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P\bigl(N_{kb/n} = 0, N_{(k+1)b/n} = 1, N_{a+(k+1)b/n} \geqq 2\bigr)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P\bigl(N_{kb/n} = 0, N_{(k+1)b/n} - N_{kb/n} = 1, N_{a+(k+1)b/n} - N_{a+kb/n} \geqq 1\bigr)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P\bigl(N_{kb/n} = 0\bigr) P\bigl(N_{(k+1)b/n} - N_{kb/n} = 1\bigr) P\bigl(N_{a+(k+1)b/n} - N_{a+kb/n} \geqq 1\bigr)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-(kb/n)\lambda} \frac{b\lambda}{n} e^{-(b/n)\lambda}(1 - e^{-a\lambda})\\
&= \int_0^b \lambda e^{-\lambda x} dx (1 - e^{-a\lambda}) = (1 - e^{-a\lambda})(1 - e^{-b\lambda}).
\end{aligned}
$$

ここで始めの等号を見るためにつぎを用いた．

$$
\begin{aligned}
&nP\biggl(\frac{kb}{n} < T_1 \leqq \frac{(k+1)b}{n}, T_2 - T_1 > a, T_2 \leqq a + \frac{(k+1)b}{n}\biggr)\\
&\leqq nP(N_{(k+1)b/n} - N_{kb/n} = 1, N_{a+(k+1)b/n} - N_{a+kb/n} = 1)\\
&= nP(N_{(k+1)b/n} - N_{kb/n} = 1) P(N_{a+(k+1)b/n} - N_{a+kb/n} = 1) = n\biggl(\frac{b}{n} e^{-\lambda b/n}\biggr)^2 \to 0 \ (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

∎

A.5　ブラウン運動

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率過程 $\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ が**ブラウン運動**であるとはつぎの 3 条件をみたすことをいう．

(i) $B_0(\omega) = 0$

(ii) 写像 $[0,\infty) \ni t \mapsto B_t(\omega) \in \mathbb{R}$ は連続である $(\forall\omega \in \Omega)$.

(iii) 任意の $n \in \mathbb{N}$，$0 < t_1 < \cdots < t_n$ と有界連続な $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対し

$$
E[f(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) \prod_{k=1}^{n} g(t_k - t_{k-1}, x_k - x_{k-1}) dx_1 \ldots dx_n
$$

が成り立つ．ただし

$$
g(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}.
$$

$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ をフィルトレーションとする．ブラウン運動 $\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ が，つぎの 2 条件をみたすとき **$(\mathcal{F}_t)$-ブラウン運動**であるという．

(a) 任意の $t \geqq 0$ に対し, $B_t : \Omega \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{F}_t$-可測である．すなわち, $\{B_t \leqq a\} \in \mathcal{F}_t$ $(\forall t \geqq 0, a \in \mathbb{R})$.

(b) $t > s$ ならば，$B_t - B_s$ と $\mathcal{F}_s$ は独立である．

この定義ではフィルトレーションが先に与えられているが，ブラウン運動を自然に $(\mathcal{F}_t)$-ブラウン運動にするフィルトレーションが存在する．実際，ブラウン運動に対し，

$$\mathcal{F}_t^B = \bigcap_{\mathcal{G}\in\Lambda_t} \mathcal{G}, \qquad \overline{\mathcal{F}}_t^B = \bigcap_{\mathcal{G}\in\Lambda'_t} \mathcal{G} \tag{17}$$

と二種類のフィルトレーションを定義できる．ただし

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_t = \bigl\{\{B_s \leqq a\} \,|\, s \leqq t, a \in \mathbb{R}\bigr\}, \quad \mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} \,|\, P(N) = 0\} \\
&\Lambda_t = \bigl\{\mathcal{G} \,|\, \mathcal{G}\text{ は }\sigma\text{ 加法族}, \mathcal{G} \supset \mathcal{A}_t\bigr\}, \quad \Lambda'_t = \bigl\{\mathcal{G} \,|\, \mathcal{G}\text{ は }\sigma\text{ 加法族}, \mathcal{G} \supset \mathcal{A}_t \cup \mathcal{N}\bigr\}.
\end{aligned}$$

$\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ は，$(\mathcal{F}_t^B)$-ブラウン運動でも，$(\overline{\mathcal{F}}_t^B)$-ブラウン運動でもある．

以下に述べるような，折れ線によるブラウン運動の構成 (P. Lévy による) が良く知られている．$Y_{m2^{-n}}$，$(n,m) \in \mathbb{N}^2$，は独立で，それぞれ $Y_{m2^{-n}} \sim N(0,1)$ をみたす，すなわち，

$$P(Y_{m2^{-n}} \leqq a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

が成り立つとする．$n \geqq 1$，$m \geqq 0$ に対し，$T_{n,m} = m2^{-n}$ とおき，

$$L_t^{m,n} = 2^{-(n+1)/2}\{1 - 2^n|t - T_{n,2m+1}|\} Y_{T_{n,2m+1}} \mathbf{1}_{[T_{n-1,m}, T_{n-1,m+1}]}(t)$$

とおく．確率過程 $\{X_t^n\}_{t\in[0,\infty)}$，$n = 0, 1, \ldots$，をつぎで定義する．

$$X_t^0 = \sum_{m=0}^{\infty} (t-m) Y_{m+1} \mathbf{1}_{[m,m+1]}, \quad X_t^n = X_t^{n-1} + \sum_{m=0}^{\infty} L_t^{n,m}, \quad n \geqq 1.$$

$\liminf_{n\to\infty} X_t^n = B_t$ とおけば，$\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ がブラウン運動となる．

$(\mathcal{F}_t)$-ブラウン運動 $\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ の性質 (b) に注意すれば，つぎの等式が成り立つ．

$$E[\exp(\sqrt{-1}\,\lambda(B_t - B_s))|\mathcal{F}_s] = E[\exp(\sqrt{-1}\,\lambda(B_t - B_s))] = \exp(-\lambda^2(t-s)/2), \quad s \leqq t.$$

A.6　モデリングの金融工学への応用

A.6.1　確率積分

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}$ をフィルトレーション，$\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ を $(\mathcal{F}_t)$-ブラウン運動とする．$\mathcal{F}_0$ は $P(N) = 0$ なる $N \in \mathcal{F}$ をすべて含むと仮定する．

X_n が X に確率収束するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$ が成り立つことをいい，$X_n \to X$ in prob と記す．これは

$$E\left[\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right] \to 0 \quad (n \to \infty)$$

と同値である．

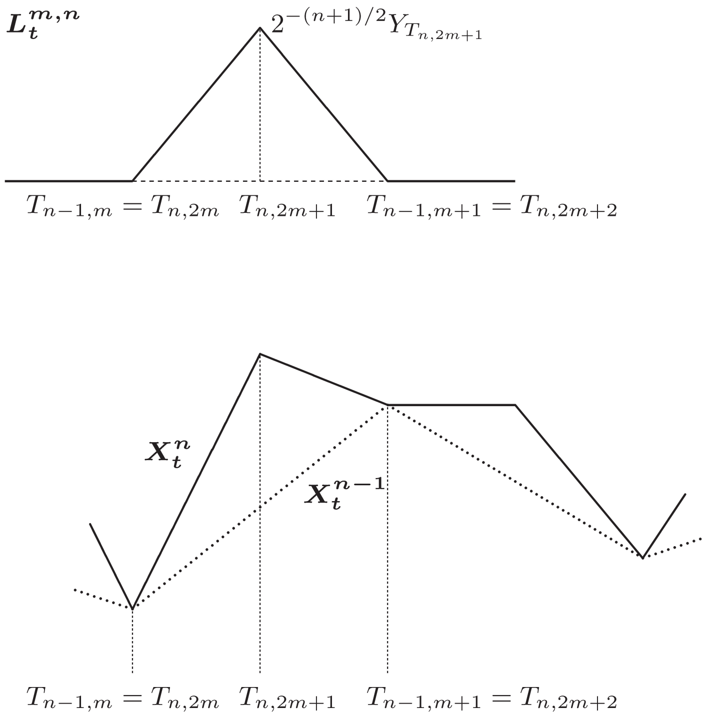

図 1: $L_t^{m,n}$ と X_t^n

$\mathcal{G}_t$ を $\mathcal{A}_t=\{[0,s]\times A\,|\,s\leqq t, A\in\mathcal{F}_t\}$ が生成する σ 加法族とする．確率過程 $\{f_t\}_{t\in[0,\infty)}$ が **$((\mathcal{F}_t)$-$)$ 発展的可測**であるとは

$$\{(s,\omega)\,|\,s\leqq t, f_s(\omega)\leqq a\}\in\mathcal{G}_t,\quad \forall t\geqq 0,\forall a\in\mathbb{R}$$

が成り立つことをいう．発展的可測な確率過程の全体を $\boldsymbol{\mathcal{PM}}$ と表す．確率積分を定義するために，つぎのような 3 種類の被積分関数の集合を定義する．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}} &= \left\{\{f_t\}_{t\in[0,\infty)}\in\mathcal{PM}\,\middle|\, P\left(\int_0^T f_t^2dt<\infty,\,\forall T>0\right)=1\right\},\\
\mathcal{L}^2 &= \left\{\{f_t\}_{t\in[0,\infty)}\in\mathcal{PM}\,\middle|\, E\left[\int_0^T f_t^2dt\right]<\infty(\forall T>0)\right\},\\
\mathcal{L}_0 &= \left\{\{f_t\}_{t\in[0,\infty)}\in\mathcal{PM}\,\middle|\, \begin{array}{l}\exists 0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n\nearrow\infty;\\ f_t=f_{t_n}(t\in[t_n,t_{n+1})),\,\sup_{\omega\in\Omega}|f_{t_n}(\omega)|<\infty\ n\in\mathbb{Z}_+\end{array}\right\}.
\end{aligned}$$

確率積分をつぎのように定義する．

(A) $\{f_t\}_{t\in[0,\infty)}\in\mathcal{L}_0$ に対し，**確率積分** $\int_0^T f_t dB_t$ を

$$\left(\int_0^T f_t dB_t\right)(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}f_{t_n}(\omega)\left\{B_{t_{n+1}\wedge T}(\omega)-B_{t_n\wedge T}(\omega)\right\},\quad T>0,\omega\in\Omega$$

と定義する．

(B) $\{f_t\}_{t\in[0,\infty)} \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ に対し，

$$\int_0^{T_0} \big\{f_t - f_t^n\big\}^2 dt \to 0 \text{ in prob}, \quad \forall T_0 > 0$$

をみたす $\{f_t^n\}_{t\in[0,\infty)} \in \mathcal{L}_0$ をとり，**確率積分** $\boldsymbol{\int_0^T f_t dB_t}$ をつぎの極限値で定義する．

$$\sup_{0\leqq T\leqq T_0}\left|\int_0^T f_t dB_t - \int_0^T f_t^n dB_t\right| \to 0 \text{ in prob}, \quad \forall T_0 > 0.$$

(B) の定義に必要な近似列は存在し，さらに極限値を定める収束が起きる．
確率積分は次のような性質をもっている．

定理 A.10 $\{f_t\}_{t\in[0,\infty)}, \{g_t\}_{t\in[0,\infty)} \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ とする．
(i) $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，確率 1 で，$\displaystyle\int_0^t \{af_t + bg_t\} dB_t = a\int_0^t f_t dB_t + b\int_0^t g_t dB_t$.
(ii) 確率 1 で，$T \mapsto \displaystyle\int_0^T f_t dB_t$ は連続である．
(iii) $\{f_t^n\}_{t\geqq 0} \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ が $\int_0^{T_0}\{f_t - f_t^n\}^2 dt \to 0$ in prob ($\forall T_0 > 0$) ならば，

$$\sup_{0\leqq T\leqq T_0}\left|\int_0^T f_t^n dB_t - \int_0^T f_t dB_t\right| \to 0 \quad \text{in prob}, \quad \forall T_0 > 0.$$

(iv) $\{f_t\} \in \mathcal{L}^2$ ならば，$\left\{\int_0^T f_t dB_t\right\}_{T\in[0,\infty)}$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールである．このとき，さらに

$$E\left[\left(\int_0^T f_t dB_t\right)^2\right] = E\left[\int_0^T f_t^2 dt\right], \quad \forall T > 0.$$

A.6.2 株価モデル

$d, N \in \mathbb{N}$ とし，$\{B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)\}_{t\in[0,\infty)}$ を d 次元 $(\mathcal{F}_t)$-ブラウン運動とする．すなわち，各 $\{B_t^i\}_{t\in[0,\infty)}$ が $(\mathcal{F}_t)$- ブラウン運動であり，$\{B_t^1\}_{t\in[0,\infty)}, \ldots, \{B_t^d\}_{t\in[0,\infty)}$ は独立であるとする．

定理 A.11 (伊藤の公式) $\{a_t^{i\alpha}\}_{t\in[0,\infty)} \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$，$\{b_t^i\}_{t\in[0,\infty)} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}$ $(1 \leqq i \leqq N, 1 \leqq \alpha \leqq d)$，$X_0^1, \ldots, X_0^N$ はすべて $\mathcal{F}_0$ 可測とする．

$$X_t^i = X_0^i + \sum_{\alpha=1}^d \int_0^t a_s^{i\alpha} dB_s^\alpha + \int_0^t b_s^i ds, \quad 1 \leqq i \leqq N, \quad X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^N) \tag{18}$$

とおく．C^2 級関数 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ に対し，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} f(X_t) = f(X_0) &+ \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s) a_s^{i\alpha} dB_s^\alpha + \sum_{i=1}^N \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s) b_s^i ds \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N \sum_{\alpha=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i x^j}(X_s) a_s^{i\alpha} a_s^{j\alpha} ds. \end{aligned} \tag{19}$$

(18) を

$$dX_t^i = \sum_{\alpha=1}^d a_t^{i\alpha} dB_t^\alpha + b_t^i dt$$

とあらわし**確率微分表示**という．$dB_t^\alpha \cdot dB_t^\beta = \delta_{\alpha\beta} dt$，$dt \cdot dB_t^\alpha = dB_t^\alpha \cdot dt = 0$ と約束して，確率微分に積を導入すれば，(19) は次のような，2 次 Taylor 展開に対応した表示になる．

$$d(f(X_t)) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x^i x^j}(X_t) dX_t^i \cdot dX_t^j.$$

関数 $\sigma_\alpha^i, b^i : [0,\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ に対し，

$$dX_t^i = \sum_{\alpha=1}^d \sigma_\alpha^i(t, X_t) dB_t^\alpha + b^i(t, X_t) dt, \quad 1 \leqq i \leqq N$$

を**確率微分方程式**といい，この関係式を満たす $\{X_t\}_{t\in[0,\infty)}$ を確率微分方程式の**解**と呼ぶ．確率微分を確率積分に戻せば，つぎの等式をみたすものを解という．

$$X_t^i = X_0 + \sum_{\alpha=1}^d \int_0^t \sigma_\alpha^i(s, X_s) dB_s^\alpha + \int_0^t b^i(s, X_s) ds.$$

$\sigma(t,x) = \left(\sigma_\alpha^i(t,x)\right)_{1\leqq i\leqq N, 1\leqq \alpha\leqq d}$ という行列と $b(t,x) = \left(b^i(t,x)\right)_{1\leqq i\leqq N}$ という縦ベクトルを用いて上を簡単に

$$dX_t = \sigma(t, X_t) dB_t + b(t, X_t) dt$$

とも表現する．

定理 A.12 以下のリプシッツ連続性と線形増大を仮定する．$\forall T$ に対し，つぎをみたす K_T が存在する．

$$\begin{cases} \sup_{t\in[0,T]} \left\{|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)|\right\} \leqq K_T |x-y|, \\ \sup_{t\in[0,T]} \left\{|\sigma(t,x)| + |b(t,x)|\right\} \leqq K_T(1+|x|), \quad x, y \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

このとき，確率微分方程式の解が一意的に存在する．

証明

$$X_t^{(0)} = x, \quad X_t^{(n)} = x + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n-1)}) dB_s + \int_0^t b(s, X_s^{(n-1)}) ds$$

と定義すれば，$X_t = \liminf_{n\to\infty} X_t^{(n)}$ が解となる． ∎

A.6.3 ブラック-ショールズ・モデル

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間，$\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ をその上のブラウン運動とし，$\overline{\mathcal{F}}_t^B$ を (17) で定義する．$r > 0$ とし，$\rho_t = e^{rt}$ とおく．ρ_t は次を満たしている．

$$d\rho_t = r\rho_t dt, \quad \rho_0 = 1.$$

ρ_t は，安全証券の時刻 t における価格を表している．

注意 A.13 安全証券が連続複利で計算した預金であれば，確率過程 $\{\rho_t\}_{t\in[0,\tau]}$ は瞬間的利子率 r の預金の価格変動を表している．連続複利は，つぎのような複利計算の極限として得られる．年利 r で $1/n$ 年ごとに利息がつけば，このとき各期の利息は r/n である．複利で求めれば，t 年後に預金は $\{1+(r/n)\}^{nt}$ 倍になる．$n\to\infty$ としたものが連続複利で，このとき預金は e^{rt} 倍になる．

$\mu\in\mathbf{R}$，$\sigma>0$ とする．$s_0>0$ とし，危険証券の時刻 t での価格 S_t は，確率微分方程式

$$dS_t=\mu S_t dt+\sigma S_t dB_t,\quad S_0=s_0$$

により定まると仮定する．連続複利 μ での安定的な発展に σ に基づくランダムな擾乱が加わっている．伊藤の公式により，解は，つぎのように具体的に表示される．

命題 A.14

$$S_t=s_0\exp\left(\sigma B_t+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right). \tag{20}$$

証明 $X_t=\sigma B_t+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t$ とおけば，

$$dX_t=\sigma dB_t+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt,\quad dX_t\cdot dX_t=\sigma^2 dt$$

となる．$f(x)=e^x$ に伊藤の公式を適用すれば，$f=f'=f''$ となることより，

$$\begin{aligned}d(f(X_t))&=f'(X_t)dX_t+\frac{1}{2}f''(X_t)dX_t\cdot dX_t\\&=\sigma f(X_t)dB_t+f(X_t)\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\frac{1}{2}f(X_t)\sigma^2 dt\\&=\sigma f(X_t)dB_t+\mu f(X_t)dt.\end{aligned}$$

すなわち $dS_t=\sigma S_t dB_t+\mu S_t dt$. ∎

S_t に対応する証券が危険なのは，ブラウン運動の揺らぎによって，価格がランダムに変動するからである．ブラウン運動を利用する株価モデルは，1900 年にフランス人バシェリエがその学位論文で提案している．このような幾何ブラウン運動を用いるモデルは，1960 年代にサミュエルソンにより提案された．

$\tau>0$ とする．これは，満期を表す．確率変数の組 (ρ_t,S_t) からなる確率過程 $\{(\rho_t,S_t)\}_{t\in[0,\tau]}$ を，預金と株価からなる金融市場の時間発展を表すものと見なし，**ブラック-ショールズ・モデル**という．

A.6.4 株価モデル

$\{S_t\}_{t\in[0,\tau]}$ に依存して支払いが決まる証券を**派生証券**という．F を満期 τ での派生証券の支払額とすれば，F は $\mathcal{F}_\tau^B$ 可測な確率変数となる．これにより，$\mathcal{F}_\tau^B$ 可測な確率変数と派生証券を同一視する．

定理 A.15 $\alpha = (r-\mu)/\sigma$ とする．Q，B_t^* をつぎで定義する (P に関する期待値を E_P と表す)．

$$Q(A) = E_P\Big[\mathbf{1}_A \exp\Big(\alpha B_\tau - \frac{1}{2}\alpha^2\tau\Big)\Big], \quad A \in \overline{\mathcal{F}}_\tau^B, \qquad B_t^* = B_t - \alpha t, \quad t \in [0,\tau]$$

(i) Q は $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}_\tau^B)$ 上の確率測度である．　さらに P と Q は**同値**である，すなわち，$N \in \overline{\mathcal{F}}_\tau^B$ が $Q(N)=0$ となるためには $P(N)=0$ となることが必要かつ十分である．
(ii) $\{B_t^*\}_{t\in[0,\tau]}$ は $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}_\tau^B, Q)$ 上のブラウン運動である．
(iii) $\{S_t/\rho_t\}_{t\in[0,\tau]}$ は Q のもと $(\overline{\mathcal{F}}_\tau^B)$-マルチンゲールである．

(i)，(iii) に因み，Q を P の**同値マルチンゲール測度**という．

$E_Q[F^2] < \infty$ をみたす派生証券 F に対し，$E_Q[e^{-r\tau}F]$ を時刻 0 における ***F* の価格**といい，$\boldsymbol{p(F)}$ と表す．買い手のつける価格の上限と売り手のつける価格の下限が一致し，それが $p(F)$ となる．これをもう少し詳しく見てみよう．$\{\theta_t^0\}, \{\theta_t^1\} \in \mathcal{PM}$ をそれぞれ安全証券，危険証券の所有高とする投資戦略を考える．資本の流出入が無ければ，この投資戦略により得られる時刻 t での資産高 $V_t(x;\theta) = \theta_t^0\rho_t + \theta_t^1 S_t$ (初期資産を x とする) は

$$V_t(x;\theta) = x + \int_0^t \theta_s^0 d\rho_s + \int_0^t \theta_s^1 dS_s = x + \int_0^t \{\theta_s^0 r\rho_s + \mu S_s\theta_s^1\}ds + \int_0^t S_s\theta_s^1 dB_s$$

を満たす．ρ_t を用いて，これを現在価値に割り引けば

$$\begin{aligned}
V_t^*(x;\theta) = V_t(x;\theta)/\rho_t &= x + \int_0^t V_s(s;\theta)d(1/\rho_s) + \int_0^t (1/\rho_s)dV_s(s;\theta) \\
&= x + \int_0^t \{\theta_s^0\rho_s + \theta_t^1 S_s\}(-r/\rho_s)ds + \int_0^t (1/\rho_s)\big[\{\theta_s^0 r\rho_s + \mu S_s\theta_s^1\}ds + \sigma S_s\theta_s^1 dB_s\big] \\
&= x + \int_0^t (\mu - r)(S_s/\rho_s)ds + \int_0^t \sigma(S_s/\rho_s)\theta_s^1 dB_s \\
&= x + \int_0^t \sigma(S_s/\rho_s)\theta_t^1 dB_t^*
\end{aligned}$$

となる．とくに

$$V_t(x;\theta) = \rho_t\Big(x + \int_0^t \sigma(S_s/\rho_s)\theta_t^1 dB_t^*\Big).$$

派生商品 F の時刻 0 での価格が x であったとする．買い手が投資戦略 θ で資産運用すれば満期時には $F + V_\tau(-x;\theta)$ が資産高になり，売り手が投資戦略 θ で資産運用すれば満期時には $-F + V_\tau(x;\theta)$ が資産高になる．価格は

$$\sup\{y \,|\, \exists\theta; F + V_\tau(-y;\theta) \geqq 0\} = \inf\{z \,|\, \exists\theta; -F + V_\tau(z;\theta) \geqq 0\}$$

の成り立つ値として定まる．Q に関し $\{(S_t/\rho_t)\theta_t^1\} \in \mathcal{L}^2$ ならば

$$E_Q\Big[\int_0^t (S_s/\rho_s)\theta_s^1 dB_s^*\Big] = 0, \quad E_Q[F + V_\tau(x;\theta)] = E_Q[F] + e^{\tau r}x$$

となる．したがって

$$\sup\{y \,|\, \exists\theta; F + V_\tau(-y;\theta) \geqq 0\} \leqq E_Q[e^{-\tau r}F] \leqq \inf\{z \,|\, \exists\theta; -F + V_\tau(z;\theta) \geqq 0\}$$

ここで等号が成り立ち，それが上の $p(F)$ となる．

定理 A.16 (価格公式) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を連続関数とする．$k\in\mathbf{N}$ が存在し $\sup_{x\in\mathbf{R}}|f(x)|/(1+|x|^k)<\infty$ が成り立つと仮定する．$F=f(S_\tau)$ とおく．このとき，$E_Q[F^2]<\infty$ であり，

$$p(F)=\frac{e^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}f\bigl(s_0e^{x+\{r-(\sigma^2/2\}\tau}\bigr)e^{-x^2/(2\sigma^2\tau)}dx.$$

証明 B_t^* の定義と S_t の具体表示により

$$p(F)=E_Q[e^{-r\tau}f(S_\tau)]=e^{-r\tau}E_Q[f(s_0e^{\sigma B_\tau^*+\{r-(\sigma^2/2)\}\tau})].$$

Q のもと $\sigma B_\tau^*\sim N(0,\sigma^2\tau)$ であるから，望む等式を得る． ∎

満期に危険証券 1 単位を価格 K(**行使価格**という) で買う権利を**ヨーロピアンコールオプション**という．もし $S_\tau\geqq K$ ならば権利を行使して購入した危険証券を市場で直ちに売れば $S_\tau-K$ という利益を得る．もし $S_\tau\leqq K$ ならばこの権利を行使しない．したがってヨーロピアンコールオプションの満期 τ での支払いは，$\boldsymbol{C_0=\max\{S_\tau-K,0\}}$ である．満期に危険証券 1 単位を行使価格 K

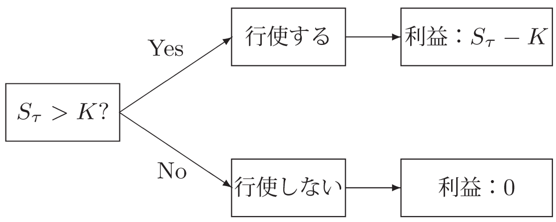

図 2: ヨーロピアンコールオプション

で売る権利は，**ヨーロピアンプットオプション**と呼ばれ，その支払いは $\boldsymbol{P_0=\max\{K-S_\tau,0\}}$ である．

定理 A.16 から従うつぎの等式は，**ブラック・ショールズの価格付け公式**と呼ばれている．

$$p(C_0)=s_0N(d_+)-Ke^{-r\tau}N(d_-),\quad p(P_0)=Ke^{-r\tau}N(-d_-)-s_0N(-d_+).$$

ただし，

$$N(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy,\quad d_\pm=\frac{\log(s_0/K)+(r\pm(\sigma^2/2))\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

ブラウン運動の代わりにレヴィ過程を用いる考察もある．

A.6.5 金利変動モデル

$T^*>0$ とし，$0<T<T^*$ とする．金利に関連する金融商品は満期がいつであるかということに強く依存する．このため，ブラック・ショールズ・モデルで現れたオプションのように満期 T を固定するのでなく，T^* を導入して，金融商品の償還期 T への依存性も考察の対象としている．

償還期 T の**ゼロクーポン債**とは，所有者に 1 単位の現金を事前に定めた時刻 T に支払うという金融商品をいう．$B(t,T)$ $(t \le T)$ を，償還期 T のゼロクーポン債の時刻 t における債券価格とする．1 単位の現金が支払われるということから，$B(T,T) = 1$ となっている．

ゼロクーポン債の**イールド** (利回り) は，

$$Y(t,T) = -\frac{1}{T-t}\log B(t,T)$$

で与えられる．金利の期間構造 (イールドカーブ) とは，関数 $T \mapsto Y(t,T)$ のことをいう．**フォワード (先渡し) 金利** $f(t,T,U)$ と**瞬間的フォワード金利** $f(t,T)$，$t \le T \le U$，を

$$f(t,T,U) = \frac{\log B(t,T) - \log B(t,U)}{U-T}, \quad f(t,T) = f(t,T,T) = -\frac{\partial \log B(t,T)}{\partial T}$$

と定義する．イールドとフォワード金利の間には $Y(t,T) = f(t,t,T)$ という関係式が成り立っている．**瞬間的スポット金利** r_t を

$$r_t = f(t,t)$$

と定義する．

瞬間的スポット金利について様々なモデルが提案されている．有名なモデルを列挙しよう．

(I) **バシチェック・モデル．** バシチェック (O. Vasicek) は

$$dr_t = (a - br_t)dt + \sigma dB_t, \quad (a,b,\sigma > 0)$$

というモデルを提案した．解は

$$r_t = r_0 e^{-bt} + \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right) + \sigma\int_0^t e^{-b(t-u)}dB_u.$$

しかしながら，$r_t < 0$ が正の確率で起きてしまうという不具合を持っている．

(II) **コックス・インガーソル・ロス (CIR)・モデル．** コックス，インガーソルとロス (J.C. Cox, J.E. Ingersoll, S.A. Ross) によって提案されたのは

$$r_t = r_0 e^{-bt} + \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right) + \sigma\int_0^t e^{-b(t-u)}dB_u.$$

しかしながら，$r_t < 0$ が正の確率で起きてしまうという不具合を持っている．

(III) **コックス・インガーソル・ロス (CIR)・モデル．** コックス，インガーソルとロス (J.C. Cox, J.E. Ingersoll, S.A. Ross) によって提案されたのは

$$dr_t = (a - br_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dB_t$$

というモデルである．このモデルは，ベッセル関数と密接に結びついた特別な確率過程 (ベッセル過程と呼ばれる) を利用して解析することができる．

(IV) **ハル・ホワイト・モデル．** ハルとホワイト (J. Hull, A. White) は次の確率微分方程式で与えられるモデルを提案した．

$$dr_t = (a(t) - b(t)r_t)dt + \sigma(t)dB_t.$$

ただし，$a, b, \sigma : [0, \infty) \to (0, \infty)$ は時間 t だけの関数である．この方程式の解は次で与えられる．

$$r_t = e^{-\ell(t)}\left(r_0 + \int_0^t e^{\ell(u)} a(u)du + \int_0^t e^{\ell(u)}\sigma(u)dB_u\right), \quad \ell(t) = \int_0^t b(u)du.$$

B　モデリング 5 章「線形計画法」に関連して

「モデリング」5 章「線形計画法」に関連する数学的側面を概説する．

B.1　定式化

B.1.1　定式化

最適化問題とは，制約条件化で与えられた関数の**最大値**を求める問題のことをいう．『最小値 =− 最大値』であるから，最大値問題を扱えば十分である．制約条件がつぎのような線型方程式で与えられるものを**線形計画問題**という．問題の一般系は，つぎのような形をしている．

問題の一般形

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

という条件の下に**目的関数**

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

を最大にする $x_1, \ldots, x_n$ と最大値を求めよ．

B.2　標準形の線形計画問題

一般の線形計画問題を次のように等式化し，得られる問題を**標準形**という．

線形計画問題の標準形

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} & = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} & = b_m \\ x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

という条件の下に**目的関数**

$$z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

を最大にする $x_1, \ldots, x_n$ と最大値を求めよ.

$x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ を**スラック変数**という．制約条件を満たす $(x_1, \ldots, x_{n+m})^\dagger \in \mathbb{R}^{n+m}$ を**実行可能解**, それらの集合を**実行可能領域**という．以下では, $\mathbb{R}^N$ は列ベクトルからなるベクトル空間として扱う．記号 $\dagger$ は転置を表す.

B.3 行列表現

$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N)^\dagger, \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_N)^\dagger \in \mathbb{R}^N$ に対し, $x_i \geq y_i\ (\forall i = 1, \ldots, N)$ が成り立つとき, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}$ と表す.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, とおく．一般および標準形の線形計画問題は次のように行列表現される.

一般の線形計画問題:

$$\begin{cases} A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \quad (\in \mathbb{R}^n) \end{cases} \quad \text{のもと} \quad z = \boldsymbol{c}^\dagger \boldsymbol{x} \quad \text{を最大化する.}$$

標準形の線形計画問題:

$$\begin{cases} A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \quad (\in \mathbb{R}^{n+m}) \end{cases} \quad \text{のもと} \quad z = \boldsymbol{c}^\dagger \boldsymbol{x} \quad \text{を最大化する.}$$

B.4 頂点と拡大した制約条件行列の関係

$M \subset \mathbb{R}^N$ が**凸集合**であるとは，$t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \in M$ $(\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M, t \in [0,1])$ となることをいう．$\boldsymbol{x} \in M$ が，凸集合 $M \subset \mathbb{R}^N$ の頂点であるとは，$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in M \setminus \{\boldsymbol{x}\}$，$\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$ により，$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ とは表現できないことをいう．

命題 B.1 標準形の線形計画問題に対し $\mathcal{D}(A', \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N \mid A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0\}$ とおく (実行可能領域)．ただし $N = n + m$．$\mathcal{D}(A', \boldsymbol{b})$ は凸集合である．

証明 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{D}(A', \boldsymbol{b})$ とおく．$t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \geq 0$ は容易に分かる．

$$A'(t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y}) = tA'\boldsymbol{x} + (1-t)A'\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{b} + (1-t)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

よって $\mathcal{D}(A', \boldsymbol{b})$ は凸集合である． ∎

「モデリング」定理 5.4.4 の完全な証明を与える．

定理 B.2 (「モデリング」定理 5.4.4) 行列 A' を，$A' = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N)$ $(\boldsymbol{a}_j \in \mathbb{R}^m)$ と表す．$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N)^\dagger \in \mathcal{D}(A', \boldsymbol{b})$ とする．$i_1 < \cdots < i_t$ を $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}\} = \{x_1, \ldots, x_N\} \setminus \{0\}$ となるものとする．このとき

$$\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_t} \text{は線形独立である} \overset{\text{必要十分}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x} \text{ は } \mathcal{D}(A', \boldsymbol{b}) \text{ の頂点である．}$$

証明

$$\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_t} \text{は線形従属である} \overset{\text{必要十分}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x} \text{ は } \mathcal{D}(A', \boldsymbol{b}) \text{ の頂点でない}$$

を示す．

$(\Longleftarrow)$ $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_N)^\dagger \neq \boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_N)^\dagger$，$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{D}(A', \boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ とする．

$i \notin \{i_1, \ldots, i_t\}$ ならば $x_i = 0$ である．よって $y_i + z_i = 0$．$y_i, z_i \geq 0$ であるから，$y_i = z_i = 0$ となる．

$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{D}(A', \boldsymbol{b})$ であるから，上とあわせて

$$\sum_{j=1}^{t} y_{i_j} \boldsymbol{a}_{i_j} = \boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^{t} z_{i_j} \boldsymbol{a}_{i_j}.$$

すなわち

$$\sum_{j=1}^{t} (y_{i_j} - z_{i_j}) \boldsymbol{a}_{i_j} = 0.$$

線形独立性より，$y_{i_j} = z_{i_j}$ $(1 \leq j \leq t)$ となる．よって $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$ となる．これは矛盾である．

$(\Longrightarrow)$ $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_t}$ は線形従属であるから，$(\kappa_1, \ldots, \kappa_t) \neq 0$ が存在し，$\sum_{j=1}^{t} \kappa_j \boldsymbol{a}_{i_j} = 0$ となる．

$$k_i = \begin{cases} 0, & (i \notin \{i_1, \ldots, i_t\}) \\ \kappa_j, & i = i_j, \end{cases} \qquad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_N \end{pmatrix}$$

とおく．

$$A'\boldsymbol{k} = 0 \tag{21}$$

である．

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{x_{i_j}/|\kappa_j| \mid 1 \leq j \leq t\}$$

とおく．ただし $a/0 = \infty$ とする．仮定より $x_{i_j} > 0$ $(1 \leq j \leq t)$ であるから，$0 < \varepsilon < \infty$ である．$1 \leq j \leq t$ に対し

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}x_{i_j}/|\kappa_j| &\Rightarrow 0 < \varepsilon|\kappa_j| \leq \frac{1}{2}x_{i_j} \\ &\Rightarrow \pm\varepsilon\kappa_j \geq -\frac{1}{2}x_{i_j} \Rightarrow x_{i_j} \pm \varepsilon\kappa_j \geq x_{i_j} - \frac{1}{2}x_{i_j} = \frac{1}{2}x_{i_j} > 0. \end{aligned}$$

$\boldsymbol{k}$ の定義とあわせて，$\boldsymbol{x} \pm \varepsilon\boldsymbol{k} \geq 0$ である．また，(21) より

$$A'(\boldsymbol{x} \pm \varepsilon\boldsymbol{k}) = A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

すなわち，$\boldsymbol{x} \pm \varepsilon\boldsymbol{k} \in \mathcal{D}(A', \boldsymbol{b})$ である．さらに，$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\{(\boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{k}) + (\boldsymbol{x} - \varepsilon\boldsymbol{k})\}$ であるから，$\boldsymbol{x}$ は頂点でない． ∎

B.5 シンプレックス法

B.5.1 最大値問題にたどり着くアイディア

$A' = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N)$ $(\boldsymbol{a}_j \in \mathbb{R}^m)$ と表す．

(仮定 1) $\det(\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_m}) \neq 0$ が成り立ったとする．

$U = (\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_m})^{-1}$ とおく．標準形の制約条件を

$$UA'\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{b}$$

と変形する．$\mathcal{D}(A', \boldsymbol{b}) = \mathcal{D}(UA', U\boldsymbol{b})$ である．よって，$M, \widehat{c}_i$ $(i \notin \{i_1, \ldots, i_m\})$ が存在し，

$$z = M - \sum_{i \notin \{i_1, \ldots, i_m\}} \widehat{c}_i x_i, \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}(A', \boldsymbol{b})$$

が成り立つ．実際，$\boldsymbol{e}_j = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N-j})^\dagger$ とおく．$UA' = (\widehat{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \widehat{\boldsymbol{a}}_N)$ とおけば，$\widehat{\boldsymbol{a}}_{i_j} = \boldsymbol{e}_j$ である．よって

$$\sum_{j=1}^{m} x_{i_j}\boldsymbol{e}_j + \sum_{i \notin \{i_i, \ldots, i_m\}} x_i \widehat{\boldsymbol{a}}_i = U\boldsymbol{b}.$$

成分で書けば

$$x_{i_j} + \sum_{i \notin \{i_i, \ldots, i_m\}} x_i (\widehat{\boldsymbol{a}}_i)_j = (U\boldsymbol{b})_j.$$

これを z の定義式に代入すればよい．

さらにつぎを仮定する．

(仮定 2) $U\boldsymbol{b} \geq 0$ が成り立つ．

(仮定 3) $\widehat{c}_i \geq 0 \ (i \notin \{i_1, \ldots, i_m\})$ が成り立つ.

これらの仮定の下，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ を

$$\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_m} \end{pmatrix} = U\boldsymbol{b}, \quad x_i = 0 \ (i \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$$

と定義すれば，この $\boldsymbol{x}$ が z の最大値 M を与える.

B.5.2　シンプレックス表

掃き出し法を利用して上のような U を，機械的に求める.

【仮定】　$\boldsymbol{b} \geq 0$，$\max\{c_j \,|\, 1 \leq j \leq n\} > 0$

$\boldsymbol{b} \geq 0$ ならば $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n\ 個}, b_1, \ldots, b_m)^\dagger \in \mathcal{D}(A', \boldsymbol{b})$ である．このとき，もし $\max\{c_j \,|\, 1 \leq j \leq n\} \leq 0$ ならば，$(0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m)^\dagger$ が最適解となる.

掃き出し法は以下に述べるように進められる.

(1) 制約条件，最大化関数から次のような表 (**シンプレックス・タブロ**) を作成する.

基底	x_1	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	$\cdots$	x_{n+m}	定数
x_{n+1}	a_{11}	$\cdots$	$a_{1,n}$	1	0	$\cdots$	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	0	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	0	$\vdots$
x_{n+m}	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	0	$\cdots$	0	1	b_m
z	c_1	$\cdots$	c_n	0	$\cdots$	$\cdots$	0	0

(2) • $c_j = \max\{c_i \,|\, 1 \leq i \leq n\} > 0$ となる j をとる.

• $b_i/a_{ij} = \min\{b_k/a_{kj} \,|\, k \in K_j\}$ となる i をとる．ただし $K_j = \{i \,|\, a_{kj} > 0, b_k > 0\}$.

基底	$\cdots\cdots$	x_j	$\cdots\cdots$	定数
x_{n+1}	$\cdots\cdots$	a_{1j}	$\cdots\cdots$	b_1
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{n+i}	$\cdots\cdots$	a_{ij}	$\cdots\cdots$	b_i
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
z	$\cdots\cdots$	c_j	$\cdots\cdots$	0

(3) 基底列の x_{n+i} を x_j と書き改める．この作業の後得られるシンプレックス・タブロは次のようになる.

基底	$\cdots\cdots$	x_j	$\cdots\cdots$	定数
x_{n+1}	$\cdots\cdots$	a_{1j}	$\cdots\cdots$	b_1
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\boldsymbol{x_j}$	$\cdots\cdots$	a_{ij}	$\cdots\cdots$	b_i
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
z	$\cdots\cdots$	c_j	$\cdots\cdots$	0

(4) 新しくできた x_j 行を $1/a_{ij}$ 倍しそれを記入する．この作業の後得られるシンプレックス・タブロは次のようになる．

基底	$\cdots$	$\cdots$	x_j	$\cdots\cdots$	定数
x_{n+1}	a_{11}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots\cdots$	b_1
$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$
x_j	$\boldsymbol{a_{i1}/a_{ij}}$	$\cdots$	$\mathbf{1}$	$\cdots\cdots$	$\boldsymbol{b_i/a_{ij}}$
$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$
z	$\cdots$	$\cdots$	c_j	$\cdots\cdots$	0

(5) x_{n+k}, z 行 $(k \neq i)$ から a_{kj} 倍した新 x_j 行を引く．この作業の後得られるシンプレックス・タブロは次のようになる．

基底	$\cdots\cdots$	x_j	$\cdots$	x_{n+i}	$\cdots$	定数
x_{n+1}	$\cdots\cdots$	0	$\cdots$		$\cdots$	b_1
$\vdots$		$\vdots$				$\vdots$
x_{n+i-1}	$\cdots\cdots$	0	$\cdots$		$\cdots$	b_{i-1}
x_j	$\cdots\cdots$	1	$\cdots$		$\cdots$	b_i/a_{ij}
x_{n+i+1}	$\cdots\cdots$	0	$\cdots$		$\cdots$	b_{i+1}
$\vdots$		$\vdots$				$\vdots$
x_{n+m}		0				$\vdots$
z		0		$-\widehat{c}_{n+i}$		M

これは，前小節において

$$
\begin{aligned}
U &= (\boldsymbol{a}_{n+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{n+i-1}, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{n+i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{n+m})^{-1} \\
&= \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{1j}/a_{ij} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{i-1\,j}/a_{ij} & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1/a_{ij} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & -a_{i+1\,j}/a_{ij} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_{mj}/a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

とした際に得られる $UA', U\boldsymbol{b}$ と対応する z の表示を記述している．

(6) 上のシンプレックス・タブロで z 行に正数が存在しなくなれば基底に現れている変数以外を 0 とすることで最大値問題が解決する.

z 行に整数がなくなるまで，上の操作を繰り返せばよい.

C　ガウス線形推定とガウス可測推定

C.1　はじめに

$\{Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を，確率変数 X の観測値の集まりとする．自乗可積分な確率変数の空間での最短性を論拠とし，X の $Y_\lambda\, \lambda \in \Lambda$，による推測値は，$Y_\lambda$ 達の定める空間への X の直交射影として定められる．$Y_\lambda,\, \lambda \in \Lambda$ の張る線形部分空間とする場合は線形推定と，$Y_\lambda\, \lambda \in \Lambda$ の生成する σ 加法族に関し可測な自乗可積分確率変数の空間の場合には可測推定と呼ばれる．これらふたつの推定は一般には一致しないが，ガウス確率変数の場合には一致する．本報告はその事実を紹介する．平成 20 年 6 月 27 日の日新火災海上保険株式会社での共同研究中にこの事実が話題になったことを付記しておく.

詳しく問題について述べよう．$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．$E[X^2] < \infty$ を満たす確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ の全体を $L^2(P)$ と表す．$t > 0$ とする．確率変数列 Z_s，$s \leqq t$，に対し，

$$\mathcal{L}_0 = \left\{ a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j Z_{s_j} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, s_1, \dots, s_n \leqq t \right\},$$

$$\mathcal{L} = \left\{ X \in L^2(P) \,\middle|\, \exists X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}_0 \text{ such that } E[(X - X_n)^2] \to 0 (n \to \infty) \right\}$$

$$\mathcal{G} = \bigcap_{\mathcal{H} \in \Lambda} \mathcal{H}$$

とおく．ただし

$$\Lambda = \{\mathcal{H} \,|\, \mathcal{H}\text{ は }\sigma\text{ 加法族で }\{Z_s \leqq a\} \in \mathcal{H}(\forall s \leqq t, \forall a \in \mathbb{R})\}.$$

$X \in L^2(P)$ に対し，$\mathcal{P}X$ を

$$E\big[(X - \mathcal{P}X)^2\big] = \min\big\{E[(X-Y)^2] \,|\, Y \in \mathcal{L}\big\} \tag{22}$$

と定義する ($\mathcal{P}X$ は X から $\mathcal{L}$ におろした垂線の足となっている)．$\mathcal{L}$ の定義から，

$$E\big[(X - \mathcal{P}X)^2\big] = \inf\big\{E[(X-Y)^2] \,|\, Y \in \mathcal{L}_0\big\}$$

となる．$Y \in \mathcal{L}_0$ ならば $\mathcal{G}$ 可測となることと

$$E\big[(X - E[X|\mathcal{G}])^2\big] = \inf\big\{E[(X-Y)^2] \,|\, Y \in L^2(P),\ \mathcal{G}\text{ 可測}\big\}$$

という等式により，

$$E\big[(X - E[X|\mathcal{G}])^2\big] \leqq E\big[(X - \mathcal{P}X)^2\big] \tag{23}$$

という評価式が成り立つ.

以下では，**確率変数がガウス型であれば，$\boldsymbol{\mathcal{P}X = E[X|\mathcal{G}]}$ および等号が成り立つ**ことを見る.

C.2 ガウス推定

定義 C.1 $X_1,\dots,X_n\in L^2(P)$ とする．$X=(X_1,\dots,X_n)$ がガウス型であるとは，任意の $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ に対し，$m(\xi),\sigma(\xi)\in\mathbb{R}$ が存在し，

$$E\left[\exp\left(\sqrt{-1}\,t\sum_{i=1}^n\xi_iX_i\right)\right]=\exp\left(\sqrt{-1}\,m(\xi)t-\frac{\sigma(\xi)^2t^2}{2}\right),\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

が成り立つことをいう．

両辺の $t=0$ での 1，2 階微分を比較することで

$$m(\xi)=E\left[\sum_{i=1}^n\xi_iX_i\right]=\sum_{i=1}^n\xi_iE[X_i],\quad\sigma(\xi)^2=V\left(\sum_{i=1}^n\xi_iX_i\right)=\sum_{i,j=1}^n\xi_i\xi_j\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

となる．実際，$X(\xi)=\sum_{i=1}^n\xi_iX_i$ とおけば，両辺の t での 1，2 階微分は

$$E\big[\sqrt{-1}\,X(\xi)\exp\big(\sqrt{-1}\,tX(\xi)\big)\big]=\big\{\sqrt{-1}\,m(\xi)-\sigma(\xi)^2t\big\}\exp\left(\sqrt{-1}\,m(\xi)t-\frac{\sigma(\xi)^2t^2}{2}\right),$$

$$E\big[-X(\xi)^2\exp\big(\sqrt{-1}\,tX(\xi)\big)\big]=\big(\big\{\sqrt{-1}\,m(\xi)-\sigma(\xi)^2t\big\}^2-\sigma(\xi)^2\big)\exp\left(\sqrt{-1}\,m(\xi)t-\frac{\sigma(\xi)^2t^2}{2}\right).$$

$t=0$ を代入すれば

$$\sqrt{-1}\,E[X(\xi)]=\sqrt{-1}\,m(\xi),\quad -E[X(\xi)^2]=-m(\xi)^2-\sigma(\xi)^2.$$

整理すれば

$$m(\xi)=E[X(\xi)],\quad\sigma(\xi)^2=E[X(\xi)^2]-(E[X(\xi)])^2=V(X(\xi)).$$

また

$$V(X(\xi))=E[(X(\xi)-E[X(\xi)])^2]=E\left[\left\{\sum_{i=1}^n\xi_i(X_i-E[X_i])\right\}^2\right]$$
$$=\sum_{i,j=1}^n\xi_i\xi_jE[(X_i-E[X_i])(X_j-E[X_j])]=\sum_{i,j=1}^n\xi_i\xi_j\mathrm{Cov}(X_i,X_j).$$

補題 C.2 (i) 各 $W_n=(W_n^1,\dots,W_n^m)$ がガウス型で $E[|W_n-W|^2]\to0$ ならば，極限値 $W=(W^1,\dots,W^m)$ もまたガウス型である．
(ii) $(Y,X_1,\dots,X_n)$ がガウス型で $\mathrm{Cov}(Y,X_i)=0$ $(1\leqq i\leqq n)$ ならば Y と $(X_1,\dots,X_n)$ は独立となる．

証明 (i) 必要ならば部分列をとって確率 1 で $W_n\to W$ と仮定してよい．$\xi=(\xi_1,\dots,\xi_m)\in\mathbb{R}^m$ とする．$W_n(\xi)=\sum_{i=1}^m\xi_iW_n^i$，$W(\xi)=\sum_{i=1}^m\xi_iW^i$ とおく．

$E[(W_n(\xi)-W(\xi))^2]\to0$ であるから，$E[W_n(\xi)]\to E[W(\xi)]$，$V(W_n(\xi))\to V(W(\xi))$ が成り立つ．また $W_n(\xi)\to W(\xi)$ a.s. である．よって W_n がガウス型であるという仮定より

$$\begin{aligned}E[\exp(\sqrt{-1}\,tW(\xi))]&=\lim_{n\to\infty}E[\exp(\sqrt{-1}\,tW_n(\xi))]\\&=\lim_{n\to\infty}\exp\left(\sqrt{-1}E[W_n(\xi)]t-\frac{V(W_n(\xi))t^2}{2}\right)\\&=\exp\left(\sqrt{-1}E[W(\xi)]t-\frac{V(W(\xi))t^2}{2}\right).\end{aligned}$$

よって W はガウス型である．
(ii) $t, \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$ とする．$\mathrm{Cov}(Y, X_i) = 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$ という仮定より

$$V\left(tY + \sum_{i=1}^n \xi X_i\right) = t^2 V(Y) + V\left(\sum_{i=1}^n \xi X_i\right).$$

ガウス型であるから，

$$\begin{aligned}
&E\left[\exp\left(\sqrt{-1}\left\{tY + \sum_{i=1}^n \xi_i X_i\right\}\right)\right] \\
&\quad = \exp\left(\sqrt{-1}\left\{E\left[tY + \sum_{i=1}^n \xi_i X_i\right]\right\} - \frac{1}{2} V\left(tY + \sum_{i=1}^n \xi_i X_i\right)\right\}\right) \\
&\quad = \exp\left(\sqrt{-1}\left\{E\left[tY + \sum_{i=1}^n \xi_i X_i\right]\right\} - \frac{1}{2}\left\{t^2 V(Y) + V\left(\sum_{i=1}^n \xi_i X_i\right)\right\}\right) \\
&\quad = \exp\left(\sqrt{-1} E[Y] t - \frac{V(Y) t^2}{2}\right) \exp\left(\sqrt{-1} E\left[\sum_{i=1}^n \xi_i X_i\right] - \frac{V\left(\sum_{i=1}^n \xi_i X_i\right)}{2}\right) \\
&\quad = E[\exp(\sqrt{-1}\, tY)] E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n \xi_i X_i\right)\right].
\end{aligned}$$

よって Y は $(X_1, \dots, X_n)$ と独立となる． ∎

命題 C.3 任意の $n \in \mathbb{N}$，$s_1, \dots, s_n \leqq t$ に対し，$(X, Z_{s_1}, \dots, Z_{s_n})$ がガウス型であるならば，

$$\mathcal{P}X = E[X|\mathcal{G}].$$

証明 $\widehat{Z}_s = Z_s - E[Z_s]$ とおく．$\{Z_s\}_{s \leqq t}$ の代わりに $\{\widehat{Z}_s\}_{s \leqq t}$ を用いて $\mathcal{L}_0$，$\mathcal{L}$，$\mathcal{G}$ を構成し，それらを $\widehat{\mathcal{L}}_0$，$\widehat{\mathcal{L}}$，$\widehat{\mathcal{G}}$ と表す．$\widehat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$ は容易に分かる．

$$\begin{aligned}
a_0 + \sum_{j=1}^n a_j Z_{s_j} &= \left(a_0 + \sum_{j=1}^n a_j E[Z_{s_j}]\right) + \sum_{j=1}^n a_j \widehat{Z}_{s_j}, \\
b_0 + \sum_{j=1}^n b_j \widehat{Z}_{s_j} &= \left(b_0 - \sum_{j=1}^n a_j E[Z_{s_j}]\right) + \sum_{j=1}^n b_j Z_{s_j}
\end{aligned}$$

に注意すれば

$$\widehat{\mathcal{L}}_0 = \mathcal{L}_0, \quad \widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$$

となる．さらに

$$aX + \sum_{j=1}^n \xi_j \widehat{Z}_{s_j} = aX + \sum_{j=1}^n \xi_j Z_{s_j} - \sum_{j=1}^n \xi_j E[Z_{s_j}]$$

であるから，$(X, Z_{s_1}, \dots, Z_{s_n})$ がガウス型ならば $(X, \widehat{Z}_{s_1}, \dots, \widehat{Z}_{s_n})$ もガウス型となる．
　これらの考察により，必要ならば $\widehat{Z}_s$ を考えることで，以下では $E[Z_s] = 0$ を仮定する．
　$s_1, \cdots, s_n \leqq t$ とする．$Y \in \mathcal{L}_0$ を，$Y = a_0 + \sum_{j=1}^m a_j Z_{u_j}$ $(a_j \in \mathbb{R}, u_j \leqq t)$ と表す．仮定より

$$(X, Z_{s_1}, \dots, Z_{s_n}, Z_{u_1}, \dots, Z_{u_m})$$

はガウス型なので，

$$t(X-Y)+\sum_{i=1}^{n}\xi_i Z_{s_i} = tX+\sum_{i=1}^{n}\xi_i Z_{s_i}+\sum_{j=1}^{n}(-ta_j)Z_{u_j}$$

となることに注意すれば，$(X-Y, Z_{s_1},\dots,Z_{s_n})$ はガウス型である．

$Y_n \in \mathcal{L}_0$ を $E[(Y_n-\mathcal{P}X)^2]\to 0$ $(n\to\infty)$ となるように採る．$(X-Y_n, Z_{s_1},\dots,Z_{s_n})$ はガウス型であるから，補題 C.2(i) より，

$$(X-\mathcal{P}X, Z_{s_1},\dots,Z_{s_n})$$

はガウス型となる．

$W\in\mathcal{L}$ とする．(22) より，

$$E[(X-\mathcal{P}X+\alpha W)^2] \geqq E[(X-\mathcal{P}X)^2], \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

展開して整理すれば

$$E[(X-\mathcal{P}X)^2]\alpha^2+2E[(X-\mathcal{P}X)W]\alpha \geqq 0, \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

これより

$$E[(X-\mathcal{P}X)W]=0$$

を得る．

$1, Z_s\in\mathcal{L}$ であるから，

$$E[X-\mathcal{P}X]=0, \quad E[(X-\mathcal{P}X)Z_s]=0$$

である．$E[Z_s]=0$ とあわせると

$$\mathrm{Cov}(X-\mathcal{P}X, Z_s)=E[(X-\mathcal{P}X)Z_s]=0, \quad \forall s\leqq t.$$

補題 C.2(ii) より，$X-\mathcal{P}X$ と $(Z_{s_1},\dots,Z_{s_n})$ は独立となる．$s_1,\dots,s_n$ は任意であるから，$X-\mathcal{P}X$ と $\mathcal{G}$ は独立となる．

$G\in\mathcal{G}$ とすると，独立性より

$$E[(X-\mathcal{P}X)\mathbf{1}_G]=E[(X-\mathcal{P}X)]E[\mathbf{1}_G]=0.$$

よって

$$E[X\mathbf{1}_G]=E[(\mathcal{P}X)\mathbf{1}_G].$$

すなわち

$$\mathcal{P}X=E[X|\mathcal{G}].$$

∎